САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА ИМЕНИ В.А.СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ЯГУНОВ Сергей Алексеевич

Топологические методы в алгебраической геометрии: жесткость и двойственность.

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел
01.01.04 – геометрия и топология

диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Оглавление

Терминология и Обозначения 4

Введение 9

Глава I. Основные понятия 22
  I.1. Пространства 23
  I.2. $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория 28
  I.3. T-спектры 32

Глава II. Теории когомологий на категории алгебраических многообразий 36
  II.1. Функторы когомологий 36
  II.2. Построение класса Тома 45
  II.3. Ориентируемые T-спектры 48
  II.4. Гомотетическая инволюция 55
  II.5. О некоторых произведениях в (ко)гомологиях 59
  II.6. Примеры функторов когомологий 64

Глава III. Жесткость для теорий когомологий 82
  III.1. Функторы со слабыми трансферами 85
  III.2. Случай ориентируемых теорий 88
  III.3. Неориентируемый случай 99
  III.4. Теоремы жесткости 106
  III.5. Жесткость для Гензелевых локальных колец 114

Глава IV. Теорема двойственности Пуанкаре 137

- IV.1. Теорема двойственности Пуанкаре 140
- IV.2. Доказательство Первой формулы проекции 144
- IV.3. Доказательство Второй Формулы Проекции 156
- IV.4. Теорема двойственности Пуанкаре для мотивов. 160

Приложение 171

- A. Вспомогательные геометрические конструкции 171
- B. Некоторые свойства трансфера 174

Список цитируемой литературы 178

Терминология и Обозначения

Категории и функторы

- Двойственная категория обозначается как $(\ )^\circ$. Таким образом мы, например, будем записывать контравариантный функтор F из категории $\mathfrak{A}$ в категорию $\mathfrak{B}$ как $F\colon (\mathfrak{A})^\circ \to \mathfrak{B}$.
- **Ob** — класс объектов категории.
- **Mor** — класс морфизмов категории.
- $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(-,-)$ — множество морфизмов между перечисленными объектами категории $\mathfrak{A}$.
- **Sets** — категория множеств.
- **Ab** — категория абелевых групп.
- **Gr-Ab** — категория градуированных абелевых групп.
- $\mathbb{Z}/2$-**Ab** — категория $Z/2$-градуированных абелевых групп.
- **Sch/k** — категория всех отделимых схем конечного типа над полем k.
- **Sm/k** обозначает полную подкатегорию **Sch/k**, состоящую из гладких квази-проективных алгебраических многообразий. Мы часто называем объекты этой категории просто гладкими многообразиями.
- $\mathbf{Sm^2/k}$ — категория пар вида (X, U), где $X \in \mathbf{Sm/k}$, а U — открытая подсхема в X (см. II.1.ii).
- $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}\mathbf{/k}$ — категория пар вида (X, Y), где $X \in \mathbf{Sm/k}$, а Y — локально-замкнутая подсхема в X (см. II.1.i).

- **Spc** — категория пространств (см. стр. 28).
- **Hot** — гомотопическая категория категории пространств (см. определение I.2.2).
- **SH** — стабильная гомотопическая категория (см. стр. 34).
- $\mathrm{pt} = \operatorname{Spec} k$ — терминальный объект в категории многообразий.
- id — тождественный морфизм.

Спектры и пространства

- Символ **1** обозначает тривиальное линейное расслоение.
- Для векторного расслоения $\mathcal{V}$ над X мы обозначаем через $s(\mathcal{V})$ пучок его сечений.
- Для векторного расслоения $\mathcal{V}$ над X мы обозначаем через $\mathcal{V}^\vee$ расслоение, двойственное к исходному.
- $\mathbb{P}(\mathcal{V}) = \mathbf{Proj}(\mathbf{Symm}^*(\mathcal{V}^\vee))$ — многообразие прямых в векторном расслоении $\mathcal{V}$ (проективизация $\mathcal{V}$).
- $\mathcal{O}_X(-1)$ — тавтологическое линейное расслоение на многообразии X.
- $\mathcal{O}_X(1)$ — линейное расслоение на X, двойственное к $\mathcal{O}_X(-1)$.
- $\mathbb{A}^n$ обозначает n-мерное аффинное пространство. $\mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$. Обычно $\mathbb{A}^n$ естественно отождествляется с гиперплоскостью $x_{n+1} = 0$ в $\mathbb{A}^{n+1}$.
- $\mathbb{P}^n$ обозначает n-мерное аффинное пространство; обычно $\mathbb{P}^n$ естественно отождествляется с гиперплоскостью в $\mathbb{P}^{n+1}$.
- $T := \mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1 - \{0\})$ в категории **Spc** (см пример I.1.5).
- $\mathbb{P}^\infty := \varinjlim\limits_n(\mathbb{P}^n)$ в категории **Spc**.

• Для замкнутой гладкой подсхемы $Z \subset X \in \mathbf{Sm/k}$ мы обозначаем через $B(X, Z)$ деформацию к нормальному конусу Z в X (см. стр. 173).

• Σ_T или Σ — операция взятия T-надстройки и соответствующий изоморфизм в когомологиях.

• $\Sigma_T^\infty(X)$ — надстроечный T-спектр, построенный по пространству X.

• $(\ )_+$ — операция добавления выделенной точки к пространству посредством несвязного объединения.

(Ко)гомологии, морфизмы, группы и операторы.

• В тексте диссертации для обозначения элементов групп когомологий обычно используются строчные греческие буквы, а для элементов групп гомологии - латинские.

• Для морфизма схем f мы будем обозначать через f^* (соотв. f_*) естественные отображения, индуцированные f в когомологиях (соотв. гомологиях).

• Для морфизма схем f мы будем обозначать через $f_!$ (соотв. $f^!$) отображения трансфера, индуцированные f в когомологиях (соотв. гомологиях).

• Для удобства восприятия мы обычно перемещаем индексы (там, где они присутствуют у индуцированных отображений) вверх/вниз, в позицию, противоположную предопределенной позиции для значка * или !.

• Δ всюду кроме главы I обозначает морфизм диагонали.

• $\smile$ и $\frown$ обозначают внутренние произведения в когомологиях и между когомологиями и гомологнями, соответственно.

- $\backslash$ и $/$ обозначают косые произведения.
- $\overline{\times}$ и $\underline{\times}$ — внешние произведения в когомологиях и гомологиях.
- $\mathcal{D}^{\bullet}$ и $\mathcal{D}_{\bullet}$ обозначают операторы двойственности.
- Мы пользуемся стандартным обозначением для групп (ко-)гомологии с носителями. Именно, мы часто обозначаем группу $E(X, U)$ через $E_Z(X)$, в том случае, когда U — открытая подсхема в X, а $Z = X - U$ — замкнутая подсхема с индуцированной структурой. Более того, в таких случаях мы часто будем обозначать пару (X, U) через $(X)_Z$.
- Там, где это не может привести к недоразумениям, мы стараемся избегать упоминания градуировок групп (ко-)гомологий. Однако, чтобы сделать морфизм T-надстройки совместимым с обычными обозначениями, мы будем иногда писать $E^{[d]}$ для групп когомологий, сдвинутых на d. Например, если E обозначает теорию когомологий, $E^{*,*}$, представимую T-спектром, мы полагаем $E^{[d]} := E^{*+2d,*+d}$.
- Мы обозначаем ℓ-кручение в группе G через ${}_{\ell}G$.
- Мы часто неявно отождествляем группы с их мономорфными образами.

Прочие обозначения.

- Char — экспоненциальная характеристика поля. Т.е., $\operatorname{Char} F = 1$, если поле F имеет характеристику 0 и совпадает с характеристикой в остальных случаях.
- μ_{ℓ} — пучок корней степени ℓ из единицы.
- $\operatorname{Div}(\ ,\ )$ — относительная группа дивизоров (см. стр. 124).

• Pic(,) — относительная группа Пикара(Picard) (см. стр. 107, а также [**75**]).

• $\mathcal{O}^h_{M,P}$ — гензелизация локального кольца многообразия M в точке P (см. [**52**, §I.4]).

Введение

Идея использования топологических методов в алгебраической геометрии восходит к работам Соломона Лефшеца (Solomon Lefschetz), который применял их для изучения комплексных алгебраических многообразий. В 1949м году Андре Вейль (André Weil) [**92**] сформулировал свои знаменитые гипотезы, касающиеся числа решений полиномиальных уравнений над конечными полями. В этих гипотезах содержалось предвидение обнаруженной впоследствии глубокой связи между арифметикой алгебраических многообразий над конечными полями и топологией комплексных алгебраических многообразий. В частности, Вейль отметил, что его гипотезы являются следствием существования некоторой приемлемой теории когомологий для абстрактных многообразий, а точнее, следствием формальных свойств такой теории. Предвидение Вейля блестяще оправдалось, когда спустя годы необходимая теория когомологий была построена в работах Александра Гротендика (Alexander Grothendieck), Михаэля Артина (Michael Artin) и Пьера Деллиня (Pier Deligne) (см., например [**29, 19, 20, 21**]).

В те же годы было построено много когомологических инвариантов алгебраических многообразий и схем (например, этальные и кристаллические когомологии, алгебраическая K-теория).

Когомологические методы стали мощным инструментом изучения алгебро-геометрических объектов, позволившим решить многие классические алгебраические и геометрические проблемы. (См. фундаментальную книгу Ф.Хирцебруха [**32**] и библиографию к ней.) Однако, вплоть до начала 90х годов построение теорий когомологий на категории алгебраических многообразий (или, более общо́, схем), носило спорадический характер. На тот момент было чрезвычайно сложно изучать взаимосвязи между различными теориями. Более того, важнейшая теория мотивных когомологий, параллельная сингулярным когомологиям в классической топологии, вовсе не была построена. Причиной подобных проблем являлось, в частности, отсутствие в инструментарии алгебраической геометрии «машины», позволяющей создавать теории когомологий при помощи унифицированной процедуры. В классической топологии подобная трудность была преодолена много ранее, с появлением конструкции спектра [**47, 11**].

Позволим себе привести обширную цитату из введения к статье Бейлинсона, Мак Ферсона и Шехтмана «Заметки о мотивных когомологиях», датированной 1987м годом [**15**], которая дает верное представление о состоянии предмета на тот момент.

“Imagine a world in which the K-theory $K^*(X)$ of a topological space X had been defined, but the ordinary cohomology groups $H^*(X)$ had not yet been discovered. Then the rational cohomology groups $H^*(X, \mathbb{Q})$ would be known at least as functors, since they could be defined as the associated graded of the Atiyah-Hirzebruch filtration of $K^*(X) \otimes \mathbb{Q}$. However, there would be at least three difficulties in the situation:

(1) This world would not have our explicit cocycles representing cohomology classes. These are often interesting geometric objects like differential forms or Cech cocycles which relate cohomology to other mathematical ideas.
(2) The integral cohomology groups would not be defined.
(3) The powerful computational techniques of cohomology theory would not be available.

In such circumstances, one might well expect to find a quest going on for a geometrically defined cohomology theory which, when tensored with the rationals, would admit a Chem character isomorphism from $K^*(X) \otimes \mathbb{Q}$. Present day algebraic geometry is such a world.[1]"

Приведенный выше фрагмент дает ясное понимание той ситуации, в которой оказалась алгебраическая геометрия к концу 80х годов прошлого века.

---

[1] Представьте себе мир, в котором определена K-теория $K^*(X)$ топологического пространства X, но еще не открыты обычные группы когомологий $H^*(X)$. Тогда группы когомологий с рациональными коэффициентами $H^*(X, \mathbb{Q})$ были бы известны, по крайней мере как функторы, поскольку они могут быть определены как присоединенные группы фильтрации Атьи–Хирцебруха на $K^*(X) \otimes \mathbb{Q}$. Однако, в этой ситуации мы столкнулись бы по крайней мере с тремя трудностями:

(1) Этот мир был бы лишен явного представления классов когомологий коциклами. Такие коциклы часто являются интересными геометрическими объектами, такими как, скажем, дифференциальные формы или коциклы Чеха, связывающие когомологии с другими математическими идеями;
(2) Целочисленные когомологии не были бы определены;
(3) Мощные вычислительные методы теории когомологий не были бы доступны.

В таких обстоятельствах, как всякий может ожидать, продолжаются поиски некоторой геометрически определенной теории когомологий которая, после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$, становится изоморфной $K^*(X) \otimes \mathbb{Q}$ посредством характера Черна. Алгебраическая геометрия сегодня — это такой мир.

Примерно в это же время Бейлинсон [**1**] формулирует свои, ставшие впоследствии знаменитыми, гипотезы, которым должна удовлетворять гипотетическая теория когомологий. Необходимость подобной формализации была вызвана интересом автора к общей теории L-функций и регуляторов. В то же время, сформулированные гипотезы показывают теснейшую связь этой теории с понятием мотива, введенным в 1964м году Гротендиком (см. изложение идей Гротендика в статье Ю.И.Манина [**4**]).

Начало 90х годов отмечено появлением диссертации Воеводского [**84**] (в значительной мере опубликованной в [**81**]), в которой сформулированы основы построения функтора мотивных когомологий. В дальнейшее десятилетие, в результате стратегического сотрудничества с А.А.Суслиным, появляются работы [**75, 76, 56, 91**] практически определяющие облик той части математики, которая называется сейчас $\mathbb{A}^1$-*гомотопической топологией.* Наиболее впечатляющим достижением развитой техники явилось доказательство Воеводским гипотезы Милнора [**85, 90**].

Следует заметить, что к моменту появления вышеупомянутых работ Воеводского уже существовало несколько моделей, гипотетически вычисляющих мотивные когомологии в различных ситуациях (см. например [**16, 39**]). Впоследствии, одним из важных вопросов стало сравнение различных моделей (см., например [**89**]). Изучение некоторых таких конструкций представляет существенный самостоятельный интерес и поныне, поскольку они связывают $\mathbb{A}^1$-гомотопическую топологию с другими разделами математики. Так, например, изучение комплексов, построенных по рациональным точкам грассмановых многообразий играет важную роль в теории полилогарифмов, [**26, 27**], позволяет получить новые результаты в изучении гомологий линейных групп [**53, 93**] и классической алгебраической K-теории. В частности, становится понятной мотивная природа K-группы Милнора и группы Блоха — объектов, определенных исходно на языке «образующих и соотношений» [**5, 9, 94**].

В заключение исторического обзора отметим также, что многочисленные классические проблемы в теории квадратичных форм и алгебраических групп были решены в последнее время с использованием подходов $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии. Здесь необходимо упомянуть работы Ижболдина [**37**], Вишика [**80**], Карпенко–Меркурьева [**45**], Панина–Реманна [**6**].

Как это обычно и происходит, создание новой области математики, помимо решения старых вопросов, открывает новые горизонты исследований. В частности, с появлением понятия T-спектра и ассоциированной с ним теории когомологий, возникают следующие фундаментальные вопросы.

- Какие теоремы классической алгебраической топологии выполнены и в алгебро-геометрическом контексте?
- Какие результаты, полученные ранее для конкретных теорий когомологий (например, K-теории или этальных когомологий) являются, в сущности, частными случаями более общих утверждений о T-спектрах и представимых ими теориях?
- Какие новые связи между «классическими» понятиями могут быть обнаружены, глядя с «мотивной точки зрения»?

Настоящая диссертация посвящена частичным ответам на вопросы из этих классов. Остановимся, вкратце, на ее структуре.

В главе I мы даем краткое (лишенное доказательств) введение в $\mathbb{A}^1$-гомотопическую теорию и определяем некоторые фундаментальные понятия (такие, например, как пространство или T-спектр), нужные нам в дальнейшем. В главе II вводится аксиоматика теории когомологий на категории алгебраических многообразий (аксиомы II.1.4.1–II.1.4.4), рассматриваются классы ориентируемых и неориентируемых теорий (подраздел II.1.ii), для ориентируемых теорий строится класс Тома (раздел II.2 и определение II.2.3), обсуждается мультипликативная структура в когомологиях.

Наконец, в этой же главе (раздел II.6) приводятся примеры функторов, являющихся теориями когомологий в описанном смысле. Помимо перечисления классических примеров этальных когомологий и K-функтора, мы уделяем внимание построению произведений и классов Черна для мотивных когомологий (диаграмма II.6.7 и далее). Также в подразделе II.6.iv мы строим произведения (стр. 73) и классы Черна (стр. 76) для алгебраических кобордизмов, что ранее не встречалось в литературе.

Теоремы жесткости. Основной темой, рассматриваемой в главе III, является феномен жесткости. Допуская некоторую вольность в изложении, можно сказать, что свойство жесткости состоит в том, что гомоморфизм специализации группы когомологий в рациональную точку гладкого неприводимого алгебраического многообразия не зависит от выбора точки (см. стр. 82). Жесткость в алгебраической геометрии является естественным «утончением» понятия гомотопической инвариантности. Интуитивно, соотношение между этими двумя понятиями, соответствует соотношению между алгебраически эквивалентными и рационально эквивалентными циклами, но вместо циклов мы рассматриваем соответствующие группы когомологий слоев. Будучи переформулированными в контексте классической топологии эти два свойства, очевидно, становятся эквивалентными. Классификация алгебраически эквивалентных циклов на алгебраических многообразиях и взаимодействие алгебраической и рациональной эквивалентности, а следовательно, и вопросы жесткости в приложении к группам Чжоу, изучались в алгебраической геометрии более 30и лет назад (см., например [**58, 8**].).

Феномен жесткости в том виде, в котором мы его и рассматриваем, впервые был изучен для K-функтора в работе А.А.Суслина [**73**]. Необходимость исследования подобного свойства алгебраического K-функтора была вызвана подходом автора к гипотезе Лихтенбаума (Lichtenbaum conjecture), дающей описание K-групп полей. В цитируемой статье автор доказывает важное для приложений следствие из теоремы жесткости, а именно, что выполнение условия жесткости для функтора K_i влечет изоморфизм $K_i(F) \cong K_i(G)$ для расширения алгебраически замкнутых полей $F \subset G$. Отсюда, в частности, следует, что условие жесткости не эквивалентно гомотопической инвариантности. (Рассматривая случай $i = 1$, мы получим абсурдное утверждение $F^* = G^*$.) Однако, с конечными коэффициентами жесткость выполнена для алгебраической K-теории.

Другим важным следствием жесткости является утверждение о поведении K-функтора для гензелизации алгебраического многообразия в рациональной точке. Этот результат был получен Суслиным (неопубликовано), а также независимо от него Офером Габбером (Ofer Gaber) [**24**]. Аналогичное утверждение при немного других условиях доказывается в работе Жилле–Томасона (Gillet–Thomason) [**25**]. Рассмотрим алгебраическое многообразие X над некоторым полем k и обозначим через X_M^h гензелизацию этого многообразия в неособой k-точке M. Тогда для K-групп с конечными коэффициентами $\mathbb{Z}/p$, где p взаимно просто с экспоненциальной характеристикой основного поля, выполнено соотношение $K_i(k) \cong K_i(X_M^h)$. Интуитивно переход к гензелизации в точке следует воспринимать как бесконечно малую деформацию многообразия в этой точке, а утверждение говорит нам, что K-функтор с конечными коэффициентами инвариантен относительно таких деформаций. Именно это следствие и дало название «жесткость» изучаемому явлению.

В дальнейшем, свойство жесткости для алгебраических многообразий возникает в более общем контексте в работе Суслина–Воеводского [**75**], где авторы доказывают это свойство для когомологических функторов, снабженных трансферами (т.е., в терминологии авторов, функторов на категории соответствий). Эта работа еще раз подчеркнула стратегическую связь доказательства свойства жесткости и наличия некоторых трансферов в рассматриваемой теории когомологий. Различные аспекты свойства жесткости для K-функтора исследовались и многими другими авторами (см. более подробные литературные сведения во введении к главе III).

В духе сформулированных выше общих принципов, естественно возникает вопрос, для каких еще теорий когомологий на алгебраических многообразиях можно доказать аналог теоремы жесткости. Для этого мы изучаем возможности построения трансферов для различных теорий, что является основным техническим инструментом, используемым в диссертации, и чему в значительной своей части посвящена глава III.

Трансфер (называемый также интегрированием или гомоморфизмом переноса) представляет собой гомоморфизм групп (ко-)гомологий, действующий в «неправильную сторону»[2], обладающий некоторыми естественными свойствами функториальности и определенный для фиксированного класса морфизмов. Естественным аналогом трансфера в аналитическом случае является интегрирование вдоль слоев отображения, что и дает одно из названий понятия. Условия функториальности в этом случае становятся аналогом теоремы Фубини.

В разделе III.2 мы определяем трансферы для ориентируемых теорий и класса всех проективных морфизмов. Неориентируемый случай, как мы увидим в дальнейшем, не допускает построения трансферов для столь большого класса морфизмов. Поэтому, мы вводим класс C_{triv} морфизмов, обладающих тривиализуемым нормальным расслоением и строим трансферы для этого класса. Построение таких трансферов следует философии Беккера–Готтлиба (Becker–Gottlieb) [**14**], но конечно, итоговые трансферы обладают более слабыми свойствами, чем в классическом случае. Искомый

---

[2] т.е. ковариантно для когомологий и контравариантно для гомологий, соотв.

класс морфизмов и трансферы Беккера–Готтлиба для него строятся нами в разделе III.3. Несмотря на некоторую искусственность данного построения, класс C_{triv} все еще достаточно обширен, чтобы провести доказательства основного результата главы III.

В разделе III.4 мы приводим доказательство теорем жесткости для функторов снабженных трансфером (см. теоремы III.4.5 и III.4.6), а в III.5 приводится доказательство свойства жесткости для гензелевых локальных колец (см. теорему III.5.3 и следствие III.5.4). Следует отметить, что работа с общими теориями когомологий и, как следствие, более слабое понятие трансфера на таких теориях необходимо влечет существенно более сложную технику доказательства конечного результата по сравнению с K-теорией.

В заключение обсуждения понятия жесткости, следует отметить недавний результат Остваера–Рёндингса (Röndings–Østvær) [**70**], которые произвели дальнейшее развитие понятия жесткости и перенесли его в контекст мотивов.

Двойственность Пуанкаре. Последняя глава диссертации посвящена исследованию двойственности для ориентируемых теорий (ко-)гомологий на алгебраических многообразиях. Двойственность Пуанкаре относится к числу классических результатов и впервые появляется (при доказательстве утверждения о симметричности чисел Бетти) в первом топологическом мемуаре А.Пуанкаре “Analysis Situs" [**66**]. Доказательство общей теоремы двойственности для экстраординарных теорий когомологий принадлежит, по-видимому, Ф.Адамсу [**11**]. Теоремы двойственности в различных формах относятся к числу ключевых результатов алгебраической геометрии. Так, например, двойственность для когомологий с коэффициентами в пучках играет важную роль в доказательстве гипотез Вейля (см. [**19**]). Подобные теоремы двойственности и тесно связанное с ними понятие фундаментального класса многообразия, появляются в таких классических учебниках по алгебраической геометрии, как [**31, 52**]. Также теоремам двойственности посвящена значительная часть ставшей классической книги Хартсхорна (Hartshorn) [**30**].

В контексте $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории аналог теоремы двойственности играет важную роль в работе [**22**], где это утверждение доказывается для полей нулевой характеристики.

В настоящей работе в Главе IV мы доказываем теорему двойственности Пуанкаре (см. теорему IV.1.3) для ориентируемых теорий (ко-)гомологий на алгебраических многообразиях. Для нас важным является то, что такие теории допускают трансферы для всех проективных морфизмов. Построение таких отображений для когомологического функтора уже обсуждалось нами ранее, случай теории гомологий рассматривается в работе [**65**]. Мы начинаем с определения фундаментального класса гладкого проективного равноразмерностного многообразия X/k размерности d как $[X] := \pi^!(1) \in E_{2d,d}(X)$, где $\pi\colon X \to \mathrm{pt}$ — структурный морфизм. $\frown$-умножение на фундаментальный класс дает искомое отображение двойственности (см. определение IV.1.1). Доказательство изоморфизма двойственности базируется на двух формулах проекции (теоремы IV.1.5 и IV.1.7), связывающих трансферы и мультипликативные структуры рассматриваемой теории. Доказательства этих формул проекции (для случаев $\frown$ и $/$-произведений, соответственно) приведены в разделах IV.2, IV.3.

Одним из важных приложений полученного результата является обобщение уже упоминавшейся выше теоремы двойственности Воеводского–Фридландера. Доказательство этого факта для случая основного поля произвольной характеристики, использующее доказанную нами теорему двойственности Пуанкаре было сообщено автору А.А.Суслиным. В последнем разделе (IV.4) мы формулируем и доказываем теорему двойственности для категории мотивов (см. теорему IV.4.3). Этот результат обобщает (для мотивов) полученную ранее теорему двойственности и, в частности, дает новое, простое и независимое от предыдущего изложения, доказательство теоремы двойственности Воеводского–Фридландера (см. [**22**]). В заключение заметим, что будучи примененной к классической топологической ситуации наша техника дает доказательство классической теоремы двойственности в духе категорного подхода Дольда–Пуппе (Dold–Puppe) [**3**].

* * *

В заключение, мне хотелось бы выразить мою глубокую благодарность всем тем, без чьего участия и поддержки данная работа никогда не была бы написана. Я благодарю всех своих соавторов и всех тех, с кем я имел удовольствие обсуждать различные аспекты алгебраической геометрии, алгебраической и $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии. Среди них — Владимир Воеводский

(Vladimir Voevodsky), Эрик Фридландер (Eric Friedlander), Чак Вайбель (Chuk Weibel), Рик Жардин (Rick Jardine), Йенс Хорнбостель (Jens Hornbostel), Пол Арне Оствает (Paul Arne Østvær) и многие другие.

Также мне хочется поблагодарить Институт Высших Исследований в Бюр-сюр-Иветте (IHÉS), Математический Институт Макса Планка в Бонне (MPIM) и Университет г.Билефельда за гостеприимство и замечательные условия работы во время моих многочисленных визитов.

Особенно мне хочется поблагодарить Андрея Александровича Суслина и Стьюарта Придди (Stewart Priddy) за их усилия по обучению меня алгебре и топологии, моего многолетнего соавтора Ивана Александровича Панина за многочисленные плодотворные беседы, ценные советы и постоянное внимание к моей работе, и, наконец,*the last, but not the least* — мою семью за ее любовь, понимание и терпение.

Глава I

Основные понятия

В настоящей главе мы дадим краткие определения нужных нам понятий $\mathbb{A}^1$-гомотопической теории и мотивацию их введения. Наше изложение будет следовать, в основном, лекции Воеводского на всемирном математическом конгрессе в Берлине в 1998 году [**86**] и его же лекции в Сиэттле, в обработке Чарльза Вайбеля (Ch. Weibel) [**82**]. Поскольку оба цитированных выше источника не содержат доказательств, мы также отсылаем читателя к оригинальным статьям Воеводского, Суслина и Мореля [**56, 75, 76, 89**], а также к книге [**91**].

Многократные попытки построения удовлетворительной гомотопической теории на категории схем (или, менее общо́, гладких алгебраических многообразий) упирались в несколько основных проблем, природа которых лежит в том, что исходная категория, изучаемая в классической алгебраической топологии, значительно более «пластична», чем категория алгебраических многообразий. Мы перечислим здесь лишь несколько основных причин, препятствующих естественному перенесению гомотопической теории в алгебро-геометрический контекст:

- отсутствие у точек многообразия стягиваемых окрестностей;

- весьма ограниченные возможности построения копределов (факторизации многообразий);
- бедность пространств путей.

На преодоление этих, и многих других, трудностей и направлена конструкция пространств, которую мы опишем в следующем разделе.

I.1. Пространства

Первая проблема, с которой мы сталкиваемся в попытке построить теорию гомотопий на категории **Sm/k** — отсутствие копределов. В терминах классических топологии и алгебраической геометрии эту проблему можно также назвать «отсутствием стягиваний». Существует несколько подходов, позволяющих, посредством расширения рассматриваемой категории, добиться существования некоторых копределов (рассматривая, например, категории негладких алгебраических многообразий или алгебраических пространств). Однако, все эти подходы, являясь во многом паллиативными, не дают нам возможности получить все копределы.

Существует, однако, стандартный метод формально добавить копределы всех малых диаграмм к произвольной категории $\mathcal{C}$. Необходимо рассмотреть категорию всех контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в категорию множеств **Sets**. Поскольку последняя обладает всеми копределами, мы получаем желаемую категорию. Данная категория называется, следуя Гротендику, категорией предпучков на $\mathcal{C}$ и обозначается $PreShv(\mathcal{C})$. Всякий объект X в $\mathcal{C}$ задает предпучок $R_X\colon U \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(U, X)$, называемый предпучком, представимым X. По лемме Йонеда соответствие $X \mapsto R_X$ отождествляет $\mathcal{C}$ с подкатегорией представимых предпучков в $PreShv(\mathcal{C})$. Более того, всякий предпучок является копределом представимых предпучков.

С настоящего места мы будем работать в категории предпучков $PreShv(\mathbf{Sm/k})$. Мы также будем часто обозначать представимый предпучок R_X через X, когда это не вызовет разночтений.

Назовем пунктированным предпучком пару (X, x), состоящую из предпучка X и морфизма $x\colon R_{\mathrm{pt}} \to X$. Для подсхемы Z в Y обозначим через Y/Z фактор-предпучок R_Y/R_Z. Этот предпучок, в общем случае, не является представимым, однако всегда является копределом функтора в подкатегорию представимых предпучков. Достаточно рассмотреть индексную категорию $\{\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet\}$ и функтор, соответствующий диаграмме:

(I.1.1)
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd}$$

Мы всегда рассматриваем фактор-предпучок Y/Z как пунктированный относительно канонического отображения $\mathrm{pt} \to Y/Z$. Для двух пунктированных пучков (X, x) и (Y, y) определим их приведенное произведение (smash product) как $(X, x) \wedge (Y, y) := X \times Y/(X \times y) \smile (Y \times x)$.

Приведем примеры нескольких предпучков, играющих важную роль как в $\mathbb{A}^1$-гомотопической теории в целом, так и в настоящей работе.

Пример I.1.1.

1. Обозначим через S^1_s предпучок $\mathbb{A}^1/\{0,1\}$, то есть аффинную прямую со склеенными точками 0 и 1 (node). Предпучок S^1_s называется симплициальной окружностью и представим негладким алгебраическим многообразием.
2. Объект Тэйта (Tate object) T определяется как фактор-предпучок $\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1 - \{0\}$.
3. Пространство Тома (Thom space) векторного расслоения $\mathcal{E} \to X$ задается следующим образом: $Th(\mathcal{E}) := \mathcal{E}/(E - z(X))$, где z обозначает нулевое сечение расслоения. В частности, объект Тэйта может быть получен как пространство Тома тривиального одномерного расслоения над точкой $\mathrm{pt} = \operatorname{Spec} k$.

Замечание I.1.2. К сожалению, вообще говоря, $Th(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \neq Th(\mathcal{E}_1) \wedge Th(\mathcal{E}_2)$, так как вложение Йонеды не коммутирует с копределами.

Категория $PreShv(\mathbf{Sm/k})$ уже дает нам возможность формального построения гомотопической теории, однако она обладает следующим неприятным свойством, противоречащим геометрической интуиции.

Рассмотрим покрытие схемы X открытыми подсхемами U и V. Рассмотрим также квадрат

(I.1.2)
$$\begin{tikzcd} U \frown V \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

в котором $U \frown V$ обозначает, как обычно, расслоенное произведение U и V над X. Этот квадрат является кодекартовым в категории $\mathbf{Sm/k}$ и, таким образом, схема X является категорным объединением подсхем U и V. Однако, применяя естественный функтор $\mathbf{Sm/k} \to PreShv(\mathbf{Sm/k})$, мы получаем квадрат в категории предпучков, который, вообще говоря, не является кодекартовым за исключением тривиальных случаев $U = X$ или $V = X$.

Чтобы разрешить возникшую проблему, мы перейдем к подкатегории пучков. Для этого введем на категории схем топологию Нисневича[1] (Nisnevich topology) [**59**]. Семейство $\{f_\alpha \colon U_\alpha \to X\}$ этальных морфизмов называется *покрытием Нисневича*, если для всякой точки x в X существует индекс α и такая точка u схемы U_α, что $f_\alpha(u) = x$ и поля вычетов точек u и x совпадают, то есть $k(x) \simeq k(u)$.

Предпучок называется *пучком Нисневича*, если он является пучком в смысле топологии Гротендика, определяемой на категории схем покрытиями Нисневича. Мы будем обозначать подкатегорию пучков Нисневича в категории $PreShv(\mathbf{Sm/k})$ через $\mathbf{Shv_{Nis}}(\mathbf{Sm/k})$. Пучки Нисневича обладают следующим полезным свойством [**56**, 3.1], которое может быть принято за их определение. Назовем элементарным выделенным квадратом (elementary

---

[1] Чтобы сделать кодекартовым квадрат, упомянутый выше, достаточно рассмотреть пучки в топологии Зариского, однако общий случай требует введения более тонкой топологии.

distinguished square) в категории **Sm/k** декартов квадрат вида:

(I.1.3)
$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[r, "j"] & X,
\end{tikzcd}$$

в котором морфизм p — этален, j — открытое вложение, и индуцированный морфизм $p^{-1}(X-U) \to X-U$ является изоморфизмом[2].

Предложение I.1.3. *Пучок Нисневича* $F \in \mathbf{Shv_{Nis}}(\mathbf{Sm/k})$ *переводит всякий элементарный выделенный квадрат в декартов квадрат*

(I.1.4)
$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[d] \\
F(U) \arrow[r] & F(p^{-1}(U))
\end{tikzcd}$$

в категории **Sets**.

Предложение выше, вместе с естественным условием нормализации $F(\emptyset) = \emptyset$, задает подкатегорию пучков Нисневича. Поскольку всякий элементарный выделенный квадрат кодекартов в категории **Sm/k**, представимые предпучки автоматически являются пучками Нисневича. Таким образом, функтор $X \mapsto R_X$ может быть факторизован через вложение $\mathbf{Sm/k} \to \mathbf{Shv_{Nis}}$. По лемме

---

[2] Здесь через $X - U$ обозначена максимальная приведенная подсхема X с носителем на множестве $X - U$.

Йонеда, квадрат представимых пучков, соответствующий элементарному выделенному квадрату является кодекартовым в категории $\mathbf{Shv_{Nis}}$. Мы будем называть категорию $\mathbf{Shv_{Nis}}(\mathbf{Sm/k})$ категорией *пространств*, обозначать ее через $\mathbf{Spc}$ и отождествлять алгебраические многообразия и представимые ими пучки. Следующее предложение [**86**, Theorem 2.3], являющееся следствием общей теории пучков Гротендика, резюмирует нужные нам свойства пространств.

Теорема I.1.4. *Категория* $\mathbf{Spc}$ *имеет все малые пределы и копределы. Функтор включения* $\mathbf{Spc} \to PreShv(\mathbf{Sm/k})$ *обладает левым сопряженным функтором*[3] $a_{Nis}\colon PreShv(\mathbf{Sm/k}) \to \mathbf{Spc}$, *коммутирующим как с пределами, так и с копределами.*

Возвращаясь к замечанию I.1.2, можно видеть, что в категории пространств равенство $Th(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) = Th(\mathcal{E}_1) \wedge Th(\mathcal{E}_2)$ уже выполнено, что влечет ряд полезных следствий

Пример I.1.5. Можно, например, легко убедиться, что $T^{\wedge n} \simeq \mathbb{A}^n/\mathbb{A}^n - \{0\}$, поскольку

$$T^{\wedge n} \simeq Th(\mathbf{1}) \wedge Th(\mathbf{1}) \wedge \cdots \wedge Th(\mathbf{1}) \simeq Th(\mathbf{1}^n) \simeq \mathbb{A}^n/\mathbb{A}^n - \{0\}.$$

I.2. $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория

Целью настоящего параграфа является превращение категории пространств в гомотопическую категорию. Аналогом единичного интервала в нашей ситуации будет служить аффинная прямая, поэтому все морфизмы вида $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ должны стать гомотопическими эквивалентностями.

---

[3] называемым функтором ассоциированного пучка.

Для задания этого класса перейдем к рассмотрению симплициальных пучков.

Обозначим через $\Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Spc}$ категорию симплициальных пространств, т.е. контравариантных функторов из стандартной симплициальной категории $\mathbf{\Delta}$ в категорию $\mathbf{Spc}$.

Обозначим также, через $\Delta^\bullet$ стандартный симплициальный объект в категории многообразий, представленный, в размерности n схемой

$$\Delta^n = \operatorname{Spec}\Big(k[t_0, \ldots, t_n]/\Big(\sum t_i = 1\Big)\Big). \tag{I.2.1}$$

Существует функтор «цепей» $C_*\colon \mathbf{Spc} \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathbf{Spc}$, сопоставляющий каждому пучку $\mathcal{F} \in \mathbf{Spc}$ симплициальный пучок $C_*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(- \times \Delta^\bullet)$. Левым сопряженным к этому функтору является функтор геометрической реализации $X \mapsto |X|_{\mathbb{A}^1}$.

Подобно классическому симплициальному случаю (см. [**49**]), можно определить резольвентный функтор, или пополнение по Кану, Ex^∞ для всякого симплициального пространства [**56, 86**]. Интуитивно, смысл этого функтора таков. Мы рассматриваем симплексы, лишенные одной грани (называемые «рогами» в [**2**]). Каждый «рог» заклеивается симплексами высших размерностей, и данная процедура повторяется итеративно. В результате мы, очевидно, не меняя гомотопического типа исходного пространства, превращаем его в «почти расслоенное» пространство, служащее аналогом канонической инъективной резольвенты в гомологической алгебре.

Определим теперь «гомотопические группы» $\pi_i^{\mathbb{A}^1}(X,x)(U)$ пространства X с отмеченной точкой $x \in Hom(U,X)$ как симплициальные гомотопические группы симплициального множества $C_*(\mathrm{Ex}^\infty(X))(U)$ с отмеченной точкой x.

Определение I.2.1 (см. [**86**], Определение 3.4). Морфизм пространств называется $\mathbb{A}^1$-слабой эквивалентностью, если он индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$\pi_i^{\mathbb{A}^1}(X,x)(U) \simeq \pi_i^{\mathbb{A}^1}(Y,f(x))(U)$$

для всякого $i \geq 0$, произвольной гладкой схемы U и любой выбранной точки x.

Определение I.2.2 (ср. [**86**], Определение 3.5). Гомотопической категорией **Hot** называется локализация категории пространств в соответствии с классом $\mathbb{A}^1$-слабых эквивалентностей.

Чтобы избежать теоретико-множественных трудностей, связанных с понятием локализации категории, можно использовать классический подход к построению гомотопической категории, предложенный Квилленом [**69**]. Он предусматривает определение трех классов морфизмов $(\mathbf{W},\mathbf{C},\mathbf{F})$ называемых, соответственно, слабыми эквивалентностями, корасслоениями и расслоениями. В нашем случае класс $\mathbf{W}$ уже определен. Мы полагаем $\mathbf{C}$ равным классу всех мономорфизмов. Класс расслоений определяется из формальных соображений, как состоящий из всех морфизмов, имеющих свойство подъема справа (right lifting property) [**69**] относительно морфизмов из $\mathbf{W} \frown \mathbf{C}$. Можно проверить, что так определенные классы удовлетворяют аксиоматике Квиллена и, следовательно, определяют структуру гомотопической категории.

Можно дать более наглядное представление о структуре класса $\mathbb{A}^1$-слабых эквивалентностей. Рассмотрим класс $\mathfrak{V}$ морфизмов, состоящий из всех изоморфизмов и всех проекций вида $X \times \mathbb{A}^1 \to X$. Определим, теперь, $\mathfrak{W}$ как минимальный класс, содержащий $\mathfrak{V}$ и удовлетворяющий следующим аксиомам (ср. [**86**, стр. 586], свойства 2,4)

(1) Пусть f и g — два морфизма такие, что определена их композиция fg. Тогда, если два морфизма из множества $\{f, g, fg\}$ принадлежат классу $\mathfrak{W}$, то же и третий.

(2) Пусть $\{X_\alpha\}$ — фильтрованная система пространств такая, что связывающие морфизмы принадлежат $\mathfrak{W}$. Тогда для всякого индекса γ естественное отображение $X_\gamma \to \varinjlim_\alpha X_\alpha$ также принадлежит $\mathfrak{W}$.

(3) Если в кодекартовом квадрате

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"'] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

$f \in \mathfrak{W}$ и f или g — мономорфизмы, то $f' \in \mathfrak{W}$.

Известно [**43, 40**], что если взять класс $\mathfrak{W}$ в качестве слабых эквивалентностей, а классы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{F}$ задать, как было сделано выше, то полученная тройка определяет структуру гомотопической категории, эквивалентной исходной.

I.3. T-спектры

В классической алгебраической топологии переход от нестабильной к стабильной категории осуществляется посредством обращения функтора надстройки. В случае категории **Spc** существует два «приемлемых» кандидата на роль окружности в рассматриваемой теории. Первый — симплициальная окружность S^1_s, возникающая после идентификации концов абстрактного 1-симплекса и имеющая геометрической моделью пространство $\mathbb{A}^1/\{0,1\}$. Выделенной точкой такой окружности является точка самопересечения (node).

Вторая окружность S^1_t, называемая окружностью Тэйта, представляет из себя аффинную прямую с удаленным началом координат и выделенной точкой 1, т.е. $S^1_t := (\mathbb{A}^1 - \{0\}, 1)$.

Замечание I.3.1. Для прояснения интуитивного значения введенных понятий посмотрим на их реализацию в случае, когда основное поле является полем комплексных чисел, и рассматривается обычная (аналитическая) топология на $\mathbb{C}$. Легко видеть, что в этом случае обе введенных окружности гомотопны обычной окружности S^1.

Рассмотрим надстроечный гомоморфизм, соответствующий объекту Тэйта $S^1_s \wedge S^1_t = T$.

Определение I.3.2. T-спектр $\mathcal{E}$ — это последовательность пунктированных пространств E_i, снабженная связывающими морфизмами $T \wedge E_i \to E_{i+1}$. Морфизмом T-спектров $\Phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ называется последовательности отображений $\varphi_n\colon E_n \to F_n$, коммутирующая со связывающими отображениями.

Следуя Воеводскому, обозначим полученную категорию спектров через $Sp(\mathbf{Spc}, T)$.

Для T-спектра $\mathcal{E}$ зададим семейство функторов $E^{p,q}\colon \mathbf{Spc} \to \mathbf{Sets}$, полагая

$$E^{p,q}(X,x) := \varinjlim_{i\gg 0} Hom_{\mathbf{Hot}}(S_s^{\wedge(p-q+i)} \wedge S_t^{(q+i)} \wedge (X,x), E_i), \tag{I.3.1}$$

где индуктивная система определена посредством связывающего отображения спектра $\mathcal{E}$. Морфизм T-спектров $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ называется *стабильной слабой эквивалентностью*, если соответствующие естественные преобразования функторов $E^{p.q}(-) \to F^{p,q}(-)$ являются изоморфизмами для всех пар $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Определим теперь гомотопическую категорию спектров (или стабильную гомотопическую категорию) как локализацию $Sp(\mathbf{Spc}, T)$ в соответствии с классом стабильных гомотопических эквивалентностей.

Как указано в [**86**], полученная категория обладает всеми «хорошими» свойствами категории спектров, доказательства которых проводятся по известным из топологии схемам, за одним исключением. Для данной категории, как впрочем, и для категории спектров в топологии, чрезвычайно сложно построить произведение. Чтобы обойти эту проблему, можно построить категорию симметрических спектров по рецептам, данным в топологии Хови, Шипли и Смитом (Hovey, Shipley и Smith) в [**35**] (см. также [**41**]). Можно показать, что стабильная гомотопическая категория $\mathbb{A}^1$-спектров эквивалентна соответствующей категории симметрических спектров. В дальнейшем, допуская некоторую вольность в обозначениях, мы, не делая различий между этими категориями, будем называть их *стабильной гомотопической категорией* и обозначать **SH**.

Подобно топологическому случаю, можно задать функтор *надстроечного спектра* Σ_T^∞ из категории пунктированных пространств в категорию спектров. Несложно видеть, что этот функтор переводит слабые эквивалентности в стабильные слабые эквивалентности и, таким образом, индуцирует функтор с тем же названием из **Hot** в **SH**.

Следуя классической топологии, зададим ассоциированные со спектром $\mathcal{E}$ группы экстраординарных гомологий и когомологий следующим образом:

$$E^{p,q}(X,x) := Hom_{\mathbf{SH}}(\Sigma_T^\infty(X,x), S_s^{\wedge(p-q)} \wedge S_t^q \wedge \mathcal{E}), \tag{I.3.2}$$

$$E_{p,q}(X,x) := Hom_{\mathbf{SH}}(S_s^{\wedge(p-q)} \wedge S_t^q, \mathcal{E} \wedge \Sigma_T^\infty(X,x)). \tag{I.3.3}$$

В дальнейшем, в настоящей работе мы будем часто использовать также аксиоматическое задание теорий (ко-)гомологий на алгебраических пространствах. Можно показать, что теория, удовлетворяющая некоторому естественному алгебраическому аналогу аксиом Стинрода–Эйленберга, представима T-спектром. Однако, все известные на сегодняшний день подходы требуют, чтобы такая теория была *a priori* задана на категории всех пространств (или хотя бы пространств конечного типа), что далеко не всегда реализуется для интересных для изучения функторов. С другой стороны, аксиоматизация и работа с набором свойств вместо исходных определений позволяет избежать излишних технических усложнений. Поэтому мы будем активно использовать аксиоматический подход, оставив в стороне обсуждение выполнимости в $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии теоремы Брауна (Brown) о представимости функторов (ко-)гомологий.

Глава II

Теории когомологий на категории алгебраических многообразий

II.1. Функторы когомологий

Мы начнем обсуждение функторов когомологий на алгебраических многообразиях с того, что напомним определение гомотопически инвариантного функтора.

Определение II.1.1. Функтор $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ называется *гомотопически инвариантным функтором*, если для всякого многообразия $X \in \mathbf{Sm/k}$ отображение $p_X^*\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1)$, индуцированное морфизмом проекции $X \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{p_X} X$ является изоморфизмом. Условие гомотопической инвариантности очевидным образом переносится на категории пар.

Также мы приведем доказательство одного простого, но важного свойства гомотопически инвариантных функторов, которое будет систематически использоваться далее.

Предложение II.1.2. *Пусть $X \in \mathbf{Sm/k}$ и $\mathcal{E} \xrightarrow{p} X$ — векторное расслоение размерности n над X. Тогда естественное отображение $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{p^*} \mathcal{F}(\mathcal{E})$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $s\colon X \to \mathcal{E}$ — нулевое сечение рассматриваемого расслоения. Имеем: $s^*p^* = (ps)^* = \mathrm{id}$, что показывает мономорфность отображения p^*.

Теперь рассмотрим два вложения: $i_0, i_1 \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \times \mathbb{A}^1$, заданные точками $\{0\}$ и $\{1\}$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$. Пусть $pr \colon \mathcal{E} \times \mathbb{A}^1 \to \mathcal{E}$ обозначает морфизм проекции. Поскольку $pr \circ i_m = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$, получаем: $i_0^* pr^* = i_1^* pr^*$. Так как pr^* — изоморфизм, $i_0^* = i_1^*$.

Пусть теперь $\{U_i = \operatorname{Spec} R_i\}$ — открытое аффинное покрытие схемы X такое, что расслоение $\mathcal{E}$ тривиально над каждой картой U_i. (То есть, $\mathcal{E}|_{U_i} = \operatorname{Spec} R_i[x_1, \dots, x_n]$.) Зададим отображения $\bar{\varphi}_i \colon R_i[x_1, \dots, x_n] \to R_i[x_1, \dots, x_n, t]$, полагая $\bar{\varphi}_i(x_k) = tx_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Введенные отображения могут быть склеены вместе в морфизм схем $\varphi \colon \mathcal{E} \times \mathbb{A}^1 \to \mathcal{E}$.

Легко видеть, что $\varphi i_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ и $\varphi i_0 = sp$. Следовательно, мы имеем: $p^* s^* = i_0^* \varphi^* = i_1^* \varphi^* = (\varphi i_1)^* = \mathrm{id}$. В итоге мы видим, что p^* — изоморфизм, обратный к s^*. □

II.1.i. Псевдо-теории. Обозначим через $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$ категорию, объектами которой являются пары (X, Y), где $X, Y \in \mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ и схема Y — локально-замкнутая подсхема в X. Морфизмами в этой категории будут обыкновенные морфизмы пар. Функтор $\mathcal{E} \colon X \mapsto (X, \emptyset)$ отождествляет $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ с полной подкатегорией в $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$.

Определение II.1.3. Мы говорим, что функтор $F \colon \mathbf{Sm}/\mathbf{k} \to G$ *допускает расширение на категорию пар* посредством функтора $\mathcal{F} \colon \overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k} \to G$, если $F = \mathcal{F} \circ \mathcal{E}$.

Определение II.1.4. Мы называем функтор $\mathcal{E} \colon (\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k})^{\circ} \to$ **Gr-Ab** *когомологической псевдо-теорией*, если он удовлетворяет следующим четырем свойствам:

(II.1.4.1) **Изоморфизм надстройки.** Для схемы $X \in \mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ и ее открытой подсхемы U положим: $W = X - U$. Тогда задан функториальный изоморфизм

$$\mathcal{E}_W(X) \overset{\Sigma}{\cong} \mathcal{E}^{[1]}_{W\times\{0\}}(X \times \mathbb{A}^1),$$

индуцированный морфизмом T-надстройки.

(II.1.4.2) **Вырезание в топологии Зарисского.** Пусть $X \overset{i}{\supseteq} X_0 \supseteq Z$ — схемы в $\mathbf{Sm/k}$ такие, что X_0 открыто в X, а Z замкнуто в X. Тогда индуцированное отображение $i^*\colon \mathcal{E}_Z(X) \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_Z(X_0)$ является изоморфизмом.

(II.1.4.3) **Гомотопическая инвариантность.** Для всякой пары $(X, Y) \in \mathbf{Sm^2/k}$ отображение $p^*\colon \mathcal{E}(X, Y) \to \mathcal{E}(X \times \mathbb{A}^1, Y \times \mathbb{A}^1)$, индуцированное проекцией, является изоморфизмом.

(II.1.4.4) **Гомотопическая чистота.** Пусть $Z \subset Y \subset X \in \mathbf{Sm/k}$ — замкнутое вложение гладких многообразий. Пусть также $\mathcal{N}$ обозначает соответствующее нормальное расслоение над Y, $i_0\colon \mathcal{N} \hookrightarrow B(X, Y)$ и $i_1\colon X \hookrightarrow B(X, Y)$ суть канонические вложения в пространство деформации к нормальному конусу (см. A.4) над точками 0 и 1, соответственно. Тогда индуцированные отображения:

$$\mathcal{E}_Z(\mathcal{N}) \underset{\cong}{\overset{i_0^*}{\longleftarrow}} \mathcal{E}_{Z\times\mathbb{A}^1}(B(X, Y)) \underset{\cong}{\overset{i_1^*}{\longrightarrow}} \mathcal{E}_Z(X)$$

— изоморфизмы.

Определение II.1.5. Назовем функтор $E\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$ *когомологической псевдо-теорией,* если он допускает расширение на категорию пар посредством некоторой когомологической псевдо-теории $\mathcal{E}\colon \overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k} \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$.

В дальнейшем, в случаях, когда это не может привести к путанице, мы будем часто использовать одинаковые обозначения для функтора и его расширения на категорию пар. Мы также будем обычно отождествлять объекты X и $(X, \emptyset)$.

Наиболее важные примеры когомологических псевдо-теорий получаются в результате следующего наблюдения.

Пример II.1.6. Всякий функтор, представимый T-спектром (См. [**85**]) является когомологической псевдо-теорией.

Поскольку категория пространств, введенная Воеводским [**86**, p.583], допускает конечные копределы, мы можем расширить всякий функтор $E\colon \mathbf{Sm/k} \to G$ на категорию $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$, полагая $\mathcal{E}(X, Y) = E(X/Y)$. Все функторы, представимые T-спектрами, удовлетворяют условиям II.1.4.1–II.1.4.3 (См [**56**], также II.3.ii ниже). Условие II.1.4.4 является, по сути, утверждением теоремы 2.2.8 из [**61**].

II.1.ii. Ориентируемые функторы. Рассмотрим категорию $\mathbf{Sm^2/k}$, чьи объекты — пары (X, U) такие, что $X \in \mathbf{Sm/k}$ и U — открытая подсхема в X. Морфизмы в этой категории суть обычные морфизмы пар.

В данном параграфе мы рассмотрим класс контравариантных функторов из $\mathbf{Sm^2/k}$ в $\mathbf{Ab}$, удовлетворяющих аксиомам (алгебраическому аналогу аксиом Стинрода-Эйленберга) и назовем такие функторы теориями когомологий на категории алгебраических многообразий. Если, дополнительно, рассматриваемые функторы допускают построение структуры Черна, мы будем называть их ориентируемыми функторами (теориями).

Естественно, основные примеры теорий когомологий возникают из функторов, представимых коммутативными кольцевыми T-спектрами, ориентируемость которых понимается в смысле работы Мореля (Morel) [**55**]. Однако, отсутствие в алгебро-геометрическом контексте удовлетворительного аналога теоремы Брауна (Brown) о представимости, равно как и удобство изложения, побудили нас представить определение ориентируемого функтора в аксиоматическом виде. Поскольку представимые T-спектрами теории естественным образом дважды-индексированы, мы решили, для совместимости с классическими примерами, сохранить индексы при рассмотрении ориентируемых функторов, хотя они и нигде не используются в рассуждениях.

Обозначим через $R\colon \mathbf{Sm^2/k} \to \mathbf{Sm^2/k}$ функтор, действующий на объектах по правилу: $R(X,U) = (U,\emptyset)$, а на морфизмах — ограничением морфизма пар на вторую компоненту. Рассмотрим градуированный функтор (семейство функторов) $E^{p,q}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ $(p,q \in \mathbb{Z})$, снабженный семейством естественных преобразований: $\partial^{p,q}\colon E^{p,q}\circ R \to E^{p+1,q}$ и удовлетворяющий следующему списку аксиом:

Замечание II.1.7. Здесь и далее, если Z замкнуто в X, мы будем часто записывать $E^{*,*}(X, X-Z)$ как $E^{*,*}_Z(X)$ и $E^{*,*}(X,\emptyset)$ как $E^{*,*}(X)$.

Аксиомы Стинрода—Эйленберга (Steenrod—Eilenberg)

Аксиома II.1.8 (Локализация). *Пусть* $(U,\emptyset) \xrightarrow{f} (X,\emptyset) \xrightarrow{j} (X,U)$ *— морфизмы в* $\mathbf{Sm^2/k}$ *такие, что* j *индуцировано* $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X$.

Тогда следующая длинная последовательность точна.

$$\cdots \xrightarrow{j^*} E^{*,*}(X) \xrightarrow{f^*} E^{*,*}(U) \xrightarrow{\partial^{*,*}} E^{*+1,*}(X,U) \xrightarrow{j^*} \cdots$$

Аксиома II.1.9 (Вырезание в топологии Зарисского)**.** *(См. II.1.4.2).*

Аксиома II.1.10 (Гомотопическая инвариантность)**.** *(См. II.1.4.3).*

Аксиома II.1.11 (Гомотопическая чистота)**.** *(См. II.1.4.4).*

Также мы предполагаем наличие мультипликативной структуры.

Аксиома II.1.12 (Мультипликативность)**.** *Задано спаривание*

$$E^{p,q}(X) \otimes E_Z^{p',q'}(X) \xrightarrow{\smile} E_Z^{p+p',q+q'}(X),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

a) функториальность: для элементов $\alpha \in E^{p,q}(X)$, $\beta \in E_Z^{p',q'}(X)$ *и проективного морфизма* $f\colon Y \to X$, *имеем:* $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \in E_{f^{-1}(Z)}^{p+p',q+q'}(Y)$;

b) для всякого X *существует двусторонняя единица* $1_X \in E^{0,0}(X)$ *и такое сопоставление функториально;*

c) ассоциативность (в предположении, что обе части корректно определены);

d) косо-коммутативность: для $\alpha \in E^{p,q}(X)$ *и* $\beta \in E^{p',q'}(X)$, *имеем:* $\alpha \smile \beta = (-1)^{p \cdot p'} \beta \smile \alpha$.

Лемма II.1.13. *Для всякого* X, *имеем:* $E_{\emptyset}^{*,*}(X) = 0$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из рассмотрения точной последовательности локализации, соответствующей паре (X, X):

$$\cdots \to E^{*,*}(X) \xrightarrow{\cong} E^{*,*}(X) \xrightarrow{\partial^{*,*}} E_{\emptyset}^{*+1,*}(X) \to \cdots$$

□

Лемма II.1.14 (Финитная аддитивность)**.** *Пусть многообразие X — несвязное объединение многообразий X_1 и X_2, то есть $X = X_1 \sqcup X_2$. Тогда $E^{*,*}(X) \xrightarrow{\cong} E^{*,*}(X_1) \oplus E^{*,*}(X_2)$.*

Доказательство. Выписывая точную последовательность локализации, соответствующую паре (X, X_1), имеем:

$$\cdots \to E^{*,*}_{X_2}(X) \to E^{*,*}(X) \to E^{*,*}(X_1) \xrightarrow{\partial^{*,*}} \cdots$$

По аксиоме вырезания: $E^{*,*}_{X_2}(X) \cong E^{*,*}(X_2)$. Левая стрелка расщепляется отображением, индуцированным вложением $X_2 \hookrightarrow X$. □

Определение II.1.15. Мы будем называть функтор (семейство функторов) $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$, удовлетворяющий аксиомам II.1.8 – II.1.12 теорией когомологий.

Среди всех теорий когомологий можно выделить важный класс ориентируемых теорий, играющий ведущую роль в наших дальнейших построениях. Определением этого класса мы сейчас и займемся.

Классы Черна

Аксиома II.1.16 (Первый класс Черна)**.** *Для всякого линейного расслоения $\mathcal{L}$ над гладким многообразием X мы можем выбрать класс $c_1(\mathcal{L}) \in E^{2,1}(X)$ (называемый первым классом Черна расслоения $\mathcal{L}$), такой, что семейство $c_1(-)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

a) Если $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}'$, то $c_1(\mathcal{L}) = c_1(\mathcal{L}')$;

b) Для морфизма $f\colon X \to Y$, мы имеем: $f^*(c_1(\mathcal{L})) = c_1(f^*(\mathcal{L}))$;

c) $c_1(\mathbf{1}) = 0$ *(Напомним, что мы обозначаем через* $\mathbf{1}$ *тривиальное линейное расслоение).*

d) $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \neq 0$.

Замечание II.1.17. Следующее утверждение, как следует из названия, является скорее теоремой, чем аксиомой. Действительно, для функторов, представимых T-спектрами, данное утверждение следует из существования структуры Черна. Однако, поскольку мы *a priori* не предполагаем представимости, мы вынуждены добавить теорему о Проективизированном Расслоении в список аксиом.

Аксиома II.1.18 (Теорема о Проективизированном Расслоении)**.** *Пусть* $\mathcal{E}$*— векторное расслоение ранга* r *над* X*. Обозначим через* $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{p} X$ *проективизацию векторного расслоения* $\mathcal{E}$ *над* X*. (Слоем такого расслоения над точкой* $\{x\}$ *в* X *является проективное пространство прямых в слое* $\mathcal{E}_x$*.) Пусть также* $\mathcal{O}(-1)$ *— тавтологическое линейное расслоение над* $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ *и* $\xi = c_1(\mathcal{O}(-1))$ *— его первый класс Черна. Тогда кольцевой гомоморфизм* $\varphi\colon E^{*,*}(X)[T]/(T^r) \to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ *такой, что* $\varphi|_{E^{*,*}(X)} = p^*$ *и* $\varphi(T) = \xi$ *является изоморфизмом градуированных* $E^{*,*}(X)$*-модулей. Другими словами,* $E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ *есть свободный* $E^{*,*}(X)$*-модуль с базисом* $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{r-1}$*. Более того, если расслоение* $\mathcal{E}$ *тривиально, отображение* φ *— кольцевой изоморфизм.*

Теорема о Проективизированнном расслоении (ТПР) позволяет нам применить предложенный Гротендиком (A. Grothendieck [**28**]) подход к построению высших классов Черна. (См. также [**55**]).

Определение II.1.19. Мы называем коэффициенты $c_i(\mathcal{E}) \in E^{2i,i}(X)$ в соотношении

$$\xi^r - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-1} + \cdots + (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathcal{E})\xi + (-1)^r c_r(\mathcal{E}) = 0$$

классами Черна векторного расслоения $\mathcal{E}$. В частности, последнее утверждение теоремы II.1.18 показывает, что все классы Черна тривиального векторного расслоения, кроме нулевого ($c_0 = 1$), принимают значение 0, как и следовало ожидать.

Из нашего определения легко получается следующее утверждение.

Следствие II.1.20 (Функториальность классов Черна). *Пусть* $f\colon Y \to X$ *— морфизм гладких многообразий. Пусть* $\mathcal{E}$ *— векторное расслоение размерности* r *над* X*. Тогда, для всякого* n*, имеем:*

$$c_n(f^*\mathcal{E}) = f^*(c_n(\mathcal{E})).$$

Доказательство. Пусть ξ_X (соотв. ξ_Y) — первый класс Черна расслоения $\mathcal{O}(-1)$ над $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})$ (соотв. $\mathbb{P}_Y(f^*\mathcal{E})$). Поскольку $\xi_Y = f^*\xi_X$, мы получаем соотношение:

$$\xi_Y^r + f^*(-c_1(\mathcal{E}))\xi_Y^{r-1} + \cdots + f^*((-1)^r c_r(\mathcal{E})) = 0, \tag{II.1.1}$$

выполненное в $E^{*,*}(\mathbb{P}_Y(f^*\mathcal{E}))$.

С другой стороны, аналогичное соотношение выполнено для класса ξ_Y^r с коэффициентами $(-1)^i c_i(f^*(\mathcal{E}))$. Так как $E^{*,*}(\mathbb{P}_Y(f^*\mathcal{E}))$ — свободный $E^{*,*}(Y)$-модуль с базисом $1, \xi_Y, \ldots, \xi_Y^{r-1}$, это влечет совпадение двух соотношений и, следовательно, равенство соответствующих классов. □

Определение II.1.21. Мы назовем теорию когомологий $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$, удовлетворяющую аксиомам II.1.16 – II.1.18 *ориентируемым функтором (теорией)*. Соответствующее семейство называется *ориентированным*, если структура Черна зафиксирована.

Рассмотрим функтор $\mathfrak{G}\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbf{Sm^2/k}$, заданный как $\mathfrak{G}(X) = (X, \emptyset)$ на объектах и, очевидным образом, на морфизмах. Этот функтор вкладывает $\mathbf{Sm/k}$ в $\mathbf{Sm^2/k}$ как полную подкатегорию. Для заданной (ориентируемой) теории $E^{*,*}$ мы будем обозначать той же буквой ее сужение на категорию $\mathbf{Sm/k}$ и также называть полученный функтор $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ (ориентируемой) теорией.

II.2. Построение класса Тома

В этом параграфе под $E^{*,*}$ будет пониматься ориентируемый функтор из категории $(\mathbf{Sm^2/k})^\circ$ в $\mathbf{Ab}$.

Пусть X — гладкое многообразие над k и пусть $\mathcal{E}$ — векторное расслоение постоянного ранга r на X. Пусть также $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ и $\mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathbf{1})$ суть проективизации расслоений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \oplus \mathbf{1}$, соответственно. Рассмотрим следующую диаграмму:

(II.2.1)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \arrow[d, equal] & & & \\
\mathbb{P}(\mathbf{1}) \arrow[r, hook, "j_{\mathbf{1}}"] \arrow[rr, hook, bend right, "s_{\mathbf{1}}"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, hook, "i_{\mathbf{1}}"] & \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathbf{1}) & \mathbb{P}(\mathcal{E} \oplus \mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathbf{1}) \arrow[l, hook', "i_{\mathcal{E}}"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}), \arrow[l, hook', "j_{\mathcal{E}}"'] \arrow[ll, hook', bend right, "s_{\mathcal{E}}"']
\end{tikzcd}$$

в которой все стрелки суть соответствующие канонические вложения.

Лемма II.2.1. *Следующие индуцированные отображения — изоморфизмы.*

$$a) \qquad j_{\mathcal{E}}^{*}\colon E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathbf{1}))\to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}));$$

$$b) \quad i_{1}^{*}\colon E^{*,*}_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\to E^{*,*}_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathcal{E}))=E^{*,*}_{X}(\mathcal{E}).$$

Доказательство. a) Заметим, что $\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathbf{1})$ — пространство расслоения тавтологического линейного расслоения $\mathcal{O}(-1)$ на $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ и отображение $j_{\mathcal{E}}$ является его нулевым сечением. Доказываемое утверждение следует из данного наблюдения и предложения II.1.2.

b) Следует из аксиомы вырезания. □

Лемма II.2.2. *Следующие короткие последовательности точны:*

$$a) \quad 0\to E^{*,*}_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\xrightarrow{\varphi}E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\xrightarrow{s_{\mathcal{E}}^{*}}E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))\to 0;$$

$$b) \quad 0\to E^{*,*}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\xrightarrow{s_{\mathbf{1}}^{*}}E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathbf{1}))\to 0;$$

$$c) \qquad 0\to E^{*,*}_{X}(\mathcal{E})\xrightarrow{\varphi}E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\xrightarrow{s_{\mathcal{E}}^{*}}E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))\to 0.$$

Доказательство. Мы докажем только утверждение a). Утверждение b) может быть доказано аналогично, наконец c) получается применением леммы II.2.1(b) к a). Посмотрим на следующий фрагмент последовательности локализации, соответствующей открытому вложению $\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathbf{1})\subset\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})$:
(II.2.2)

$$\cdots\to E^{*,*}_{\mathbb{P}(\mathbf{1})}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))\to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})\backslash\mathbb{P}(\mathbf{1}))\to\cdots$$

Применяя к этой последовательности утверждения леммы II.2.1, получаем точную последовательность

$$\text{(II.2.3)}\quad \cdots \to E^{*,*}_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})) \to E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})) \xrightarrow{s^*_{\mathcal{E}}} E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \to \cdots$$

Чтобы закончить доказательство, достаточно лишь показать, что отображение

$$\text{(II.2.4)}\qquad E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})) \xrightarrow{s^*_{\mathcal{E}}} E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$$

является эпиморфизмом. Из теоремы о Проективизированном Расслоении ясно, что обе $E^{*,*}(X)$-алгебры $E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))$ и $E^{*,*}(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ порождены первыми классами Черна соответствующих тавтологических расслоений. Отображение $s^*_{\mathcal{E}}$, очевидно, гомоморфизм $E^{*,*}(X)$-модулей. Наконец, ограничение тавтологического линейного расслоения на $\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})$ до $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ совпадает с тавтологическим линейным расслоением на $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Таким образом, сюръективность следует из функториальности первого класса Черна (Аксиома II.1.16(b)). □

Пусть ζ и ξ обозначают первые классы Черна тавтологических линейных расслоений на проективизациях $\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})$ и $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, соответственно. Как и ранее, функториальность первого класса Черна влечет, что $s^*_{\mathcal{E}}(\zeta)=\xi$. Рассмотрим теперь полином Черна:

$$\text{(II.2.5)}\qquad c_t(\mathcal{E}) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}c_{r-k}(\mathcal{E})t^k.$$

Имеем: $c_\zeta(\mathcal{E}) \in E^{2r,r}(\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1}))$. Из теоремы о Проективизированном расслоении следует, что $s^*_{\mathcal{E}}(c_\zeta(\mathcal{E})) = c_{s^*_{\mathcal{E}}\zeta}(\mathcal{E}) = c_\xi(\mathcal{E}) = 0$. Таким образом, по лемме II.2.2(c), имеем: $c_\zeta(\mathcal{E}) \in \operatorname{Im}\varphi(E^{2r,r}_X(\mathcal{E}))$.

Определение II.2.3. **(Класс Тома)** Положим: $\mathrm{th}(\mathcal{E}) = \varphi^{-1}c_\zeta(\mathcal{E}) \in E_X^{2r,r}(\mathcal{E})$ и назовем $\mathrm{th}(\mathcal{E})$ классом Тома (Thom class) векторного расслоения $\mathcal{E}$.

Предложение II.2.4. *Пусть $f\colon Y \to X$ — морфизм гладких многообразий, а $\mathcal{E}$ — векторное расслоение размерности r на X. Тогда имеем:*

$$\mathrm{th}(f^*\mathcal{E}) = f^*(\mathrm{th}(\mathcal{E})).$$

Доказательство. Из следствия II.1.20 видно, что соответствующие полиномы Черна совпадают:

$$f^*(c_t(\mathcal{E})) = c_t(f^*\mathcal{E}). \tag{II.2.6}$$

Поскольку обратный образ тавтологического линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})}(-1)$ равен $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_Y(f^*\mathcal{E}\oplus\mathbf{1})}(-1)$, мы получаем искомое. □

II.3. Ориентируемые T-спектры

II.3.i. Ориентируемые T-спектры.

Определение II.3.1. Предположим, что T-спектр $\mathcal{E}$ снабжен элементом $\gamma \in E^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$, удовлетворяющим следующим двум условиям:

i) $\gamma|_{\mathbb{P}^0} = 0 \in E^{2,1}(\mathbb{P}^0)$;

ii) $\gamma|_{\mathbb{P}^1} = \Sigma_T(1) \in E^{2,1}_{\{0\}}(\mathbb{P}^1)$ — T-надстройка единичного элемента $1 \in E^{0,0}(\mathrm{pt})$.

Пара $(\mathcal{E}, \gamma)$ называется *ориентированным симметрическим коммутативным кольцевым T-спектром.* Если $\mathcal{E}$ может быть снабжен некоторым элементом $\gamma \in E^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$, удовлетворяющим условиям (i) и (ii), то спектр $\mathcal{E}$ называется *ориентируемым симметрическим коммутативным кольцевым T-спектром.*

Чтобы описать структуру Черна рассмотрим изоморфизм функторов $\varphi\colon \mathrm{Pic}(-) \overset{\cong}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Hot}(k)}(-, \mathbb{P}^\infty)$ на категории гладких многообразий, установленный в [**56**, предложение 4.3.8.]. Здесь $\mathrm{Pic}(-)$ обозначает функтор Пикара (Picard), а $\mathbf{Hot}(k)$ — $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория из раздела I.2 (см. также [**56**]). Для линейного расслоения $\mathcal{L}$ над гладким многообразием X, положим

$$c(\mathcal{L}) := \varphi(\mathcal{L})^*(\gamma) \in E^{2,1}(X). \tag{II.3.1}$$

Мы утверждаем, что построенное соответствие $\mathcal{L} \mapsto c(\mathcal{L})$ задает структуру Черна на когомологиях $E^{*,*}$. Действительно, элемент $c(\mathcal{L})$ зависит только от класса изоморфизма расслоения $\mathcal{L}$, сопоставление класса когомологий векторному расслоению функториально относительно морфизмов замены базы линейных расслоений. Легко видеть, также, что $c(\mathbf{1})$ обнуляется, поскольку $\gamma|_{\mathbb{P}^0} = 0$. Наконец, в силу леммы II.5.2, для гладкого многообразия X и отображения проекции $p\colon \mathbb{P}^1 \times X \to \mathbb{P}^1$, элементы 1 и $p^*(\gamma|_{\mathbb{P}^1}) \in E^{2,1}(\mathbb{P}^1 \times X)$ образуют базис свободного $E^{*,*}(X)$-модуля $E^{*,*}(\mathbb{P}^1 \times X)$. Таким образом, сопоставление $\mathcal{L} \mapsto c(\mathcal{L})$ является структурой Черна.

Всякая структура Черна определяет структуру трансферов (гомоморфизмов переноса или следа) как в когомологиях (см. раздел III.2 настоящей работы и [**61**, теорема 4.1.2], так и в гомологиях (См. [**65**, теорема 5.1.4]). Именно, для всякого проективного морфизма $f\colon Y \to X$ гладких многообразий над k мы задаем два сохраняющих градуировку оператора $f_!\colon E^*(Y) \to E^*(X)$ и $f^!\colon E_*(X) \to E_*(Y)$, удовлетворяющих списку свойств III.1.4–III.1.6. Мы называем операторы $f_!$ и $f^!$ *трансферами.* (По историческим причинам такие операторы называются "интегрирования-ми"в работе [**61**].) Построенные операторы задаются своими свойствами единственным образом, с точностью до следующего условия нормализации. Для гладкого дивизора $i\colon D \hookrightarrow X$:

(II.3.2) $$i_! i^* = i_!(1) \smile \colon E^*(X) \to E^*(X),$$

(II.3.3) $$i_* i^! = i_!(1) \frown \colon E_*(X) \to E_*(X),$$

и $i_!(1) = c(\mathcal{L}(D))$.

Для проективного морфизма $f\colon Y \to X$ отображение $f_!\colon E^*(Y) \to E^*(X)$ является двусторонним гомоморфизмом $E^*(X)$-бимодулей, т.е.

(II.3.4) $$\begin{aligned} f_!(f^*(\alpha) \smile \beta) &= \alpha \smile f_!(\beta) \\ f_!(\alpha \smile f^*(\beta)) &= f_!(\alpha) \smile \beta. \end{aligned}$$

II.3.ii. Теории, представимые T-спектрами. Напомним, что для данного T-спектра $\mathcal{E}$ соответствующие группы когомологий определяются (см. [**86**]), полагая:

$$E^{p,q}(X) = Hom_{\mathbf{SH}}\left(\Sigma_T^\infty(X_+), \mathcal{E}(q)[p]\right), \tag{II.3.5}$$

где $\mathcal{E}(q)[p] := S_s^{\wedge(p-q)} \wedge S_t^{\wedge q} \wedge \mathcal{E}$. Приведенная конструкция допускает очевидное обобщение на относительный случай, поскольку категория **Spc** допускает фильтрованные копределы:

$$E^{p,q}(X, U) = Hom_{\mathbf{SH}}\left(\Sigma_T^\infty(X/U), \mathcal{E}(q)[p]\right). \tag{II.3.6}$$

Предложение II.3.2. *Аксиомы II.1.8–II.1.11 выполнены для всякой теории, представимой T-спектром.*

Доказательство. Пусть многообразия $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ образуют открытое в топологии Зарисского (Zariski) покрытие многообразия X. Рассмотрим следующий выделенный квадрат в категории **Spc**:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \frown \mathcal{V} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{U} \arrow[d] \\ \mathcal{V} \arrow[r] & X. \end{tikzcd} \tag{II.3.7}$$

Поскольку горизонтальная стрелка в этом квадрате — корасслоение, мы можем применить [**86**, предложение 4.11] и получить выделенный треугольник:

$$(\mathcal{U} \frown \mathcal{V})_+ \to \mathcal{U}_+ \oplus \mathcal{V}_+ \to X_+ \to (\mathcal{U} \frown \mathcal{V})_+[1]. \tag{II.3.8}$$

Применяя базисные утверждения теории триангулированных категорий (см. [**30**, предложение 1.1(b)]), мы получаем длинную точную последовательность Майера-Виеториса (Mayer-Vietoris):

(II.3.9)

$$\cdots \to E^{p-1,q}(\mathcal{U} \frown \mathcal{V}) \to E^{p,q}(X) \to E^{p,q}(\mathcal{U}) \oplus E^{p,q}(\mathcal{V}) \to E^{p,q}(\mathcal{U} \frown \mathcal{V}) \to \cdots$$

Тем же путем может быть получена длинная точная последовательность локализации. Нужно лишь начать с выделенного квадрата

(II.3.10)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
* \arrow[r] & X/\mathcal{U}.
\end{tikzcd}$$

Пусть теперь многообразия $X \supseteq X_0 \supseteq Z$ удовлетворяют условиям аксиомы вырезания. Утверждение аксиомы легко выводится из последовательности Майера–Виеториса, примененной к покрытию $\mathcal{U} = X_0$, $\mathcal{V} = X - Z$.

Наконец, заметим, что построенная теория является гомотопически инвариантной в силу определения категории **SH**. Проверка аксиомы гомотопической чистоты (см. утверждение A.6) осуществлена в [**56**, Предложение 3.2.24]. □

II.3.iii. Теории с конечными коэффициентами. В последующем мы будем часто использовать когомологий с коэффициентами. В этом параграфе мы кратко продемонстрируем соответствующую конструкцию для T-спектров которая, по сути, не отличается от топологической. Также, в конце параграфа мы покажем, что для представимых теорий с конечными коэффициентами выполнена гипотеза Герстена (Gersten conjecture). Подробное описание построения муровских спектров может быть найдено в работе [**70**].

Рассмотрим сферический T-спектр $\mathcal{S}^{i,j} := S^{i-j} \wedge \mathbb{G}_m^j$, являющийся мотивной $\mathbb{G}_m$-надстройкой спектра, ассоциированного с соответствующим симплициальным пучком. Для всякого натурального числа ℓ спектр $\mathcal{S}$ допускает отображение степени ℓ (например, индуцированное с отображения степени ℓ на S^1). Гомотопический кослой отображения $\ell\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ мы будем обозначать через $\mathcal{S}/\ell$ и называть мотивным муровском (Moore) $\mathbb{Z}/\ell$-спектром. Как и в топологии, мы можем определить когомологии с конечными коэффициентами следующим образом.

Определение II.3.3. Пусть $\mathcal{E}$ — T-спектр в категории $\mathbf{SH}(k)$. Для всякого многообразия $X \in \mathbf{Sm/k}$, натурального числа $\ell \in \mathbb{N}$, и целых индексов $i, m \in \mathbb{Z}$, положим:

$$E^{i,m}(X, \ell) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}(k)}(\Sigma^\infty_T(X_+), \mathcal{S}/\ell \wedge \mathcal{E}(m)[i]).$$

В частности, мы получаем: $K^{-i,0}(X, \ell) = K_i(X, \mathbb{Z}/\ell)$ для вычисляющего алгебраическую K-теорию T-спектра $K = \mathbf{BGL}$, введенного в [**86**, 6.2]. Доказательство совпадения двух определений K-функтора такое же, как и в случае целых коэффициентов (см. [**86**]). Как и в топологии, мы получаем длинную точную последовательность коэффициентов

(II.3.11)

$$\cdots \to E^{i-1,m}(X, \ell) \to E^{i,m}(X) \overset{\times \ell}{\to} E^{i,m}(X) \to E^{i,m}(X, \ell) \to \cdots ,$$

из которой извлекаем:

Лемма II.3.4. *a) Существует естественная короткая точная последовательность*

$$0 \to E^{i,m}(X) \otimes \mathbb{Z}/\ell \to E^{i,m}(X, \ell) \to_\ell E^{i+1,m}(X) \to 0.$$

b) Всякий элемент в $E^{i,m}(X, \ell)$ обнуляется после умножения на ℓ^2.

Доказательство. Точность последовательности a) непосредственно следует из длинной точной последовательности. Чтобы установить b), заметим, что в силу a), любой ℓ-делимый элемент в $E^{i,m}(X,\ell)$ отображается в ноль в ${}_\ell E^{i+1,m}(X)$ и, следовательно, лежит в образе $E^{i,m}(X)\otimes\mathbb{Z}/\ell$. □

Как следует из вышеприведенной конструкции, если теория E представима в $\mathbf{SH}(k)$, то представима также и теория с конечными коэффициентами $E(\ \ ,\ell)$. Таким образом, следующая формулировка гипотезы Герстена также применима и к теории с конечными коэффициентами.

Предложение II.3.5. *Над бесконечным полем k комплекс Кузена (Cousin) (см.* [**17**, section 1]*) для E является резольвентой пучка групп в топологии Зарисского, заданного как $X\mapsto E(X)$. В частности, если кольцо R локальное и существенно гладкое над k, отображение*

$$0\to E(R)\to E(\mathrm{Frac}(R))$$

является мономорфизмом.

Доказательство. В работе [**33**, Corollary 2.9], подобное утверждение доказано для функтора KO, однако, несложно видеть, что то же доказательство проходит и для любой представимой теории E, принимая во внимание (так как E коммутирует с пределами по фильтрованной категории) изоморфизм $E_\eta(R)\cong E(\mathrm{Frac}(R))$ где η — общая точка $\mathrm{Spec}\,R$. □

Замечание II.3.6. Заметим, что здесь мы не можем избавиться от условия бесконечности поля k так, как это происходит в [**17**, Теорема 6.2.5], поскольку мы, вообще говоря, не можем доказать формулу COH6 из *loc. cit.* для наших трансферов.

II.4. Гомотетическая инволюция

Лемма II.4.1. *Рассмотрим гладкую пару* $X \in \mathbf{Sm^2/k}$*, снабженную линейным действием группы* $SL_n(k)$*. Верно, что для всякой матрицы* $\alpha \in SL_n(k)$ *индуцированный изоморфизм* $E(X) \xrightarrow{\alpha^*} E(X)$ *является тождественным.*

Доказательство. Любая матрица из $SL_n(k)$ может быть записана в виде произведения элементарных матриц. Всякая элементарная матрица действует на X тождественно, поскольку существует каноническая стягивающая гомотопия $H(e_{ij}(a), t) = e_{ij}(at)$. □

Лемма II.4.2. *Над квадратично замкнутым полем* k *стандартная гомотетия аффинной прямой* $\mathbb{A}^1$ *с коэффициентом* $\lambda \in k^*$ *индуцирует тождественный изоморфизм групп когомологий с носителями в точке* $E_{\{0\}}(\mathbb{A}^1) \underset{=}{\xrightarrow{\lambda^*}} E_{\{0\}}(\mathbb{A}^1)$*.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

(II.4.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] & \mathbb{A}^1 \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, "\Lambda"] & \mathbb{P}^1,
\end{tikzcd}$$

где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а вертикальные стрелки суть стандартные открытые вложения, заданные формулой $a \mapsto (a : 1)$. По аксиоме вырезания, из рассматриваемой диаграммы вытекает коммутативность следующей диаграммы групп когомологий:

(II.4.2)
$$\begin{tikzcd} E_{\{0\}}(\mathbb{A}^1) & E_{\{0\}}(\mathbb{A}^1) \arrow[l, "\lambda^*"'] \\ E_{\{0\}}(\mathbb{P}^1) \arrow[u, "\cong"] & E_{\{0\}}(\mathbb{P}^1). \arrow[l, "\Lambda^*"] \arrow[u, "\cong"] \end{tikzcd}$$

Избавимся, теперь, от носителей. Поскольку естественное отображение $E(\mathbb{P}^1) \to E(\mathbb{A}^1) = E(\mathrm{pt})$ расщепляется проекцией $\mathbb{P}^1 \to \mathrm{pt}$, длинная точная последовательность когомологий показывает, что отображение расширения носителя $E_{\{0\}}(\mathbb{P}^1) \overset{ext}{\to} E(\mathbb{P}^1)$ — мономорфизм. Действие диагональной матрицы, очевидно, коммутирует с отображением ext. Следовательно, достаточно лишь показать, что матрица Λ действует тождественно на $E(\mathbb{P}^1)$. Эта матрица SL_2-эквивалентна следующей: $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$. (Напомним, что поле k предполагается квадратично замкнутым.) По лемме II.4.1 две SL_2-эквивалентные матрицы индуцируют одинаковое действие в когомологиях, а последняя матрица, очевидно, действует тождественно на $\mathbb{P}^1$. □

Лемма II.4.3. *Над квадратично замкнутым полем k действие матрицы из $GL_n(k)$ на $\mathbb{A}^n$ посредством левого умножения индуцирует тождественные автоморфизмы групп $E_{\{0\}}(\mathbb{A}^n)$.*

Доказательство. Заменяя, если необходимо, действующую матрицу ее SL_n-эквивалентной, мы можем предполагать, не ограничивая общности, что наша матрица имеет вид $\Lambda = diag(\lambda, 1, \dots, 1)$.

Заметим, также, что пара $(\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n - \{0\})$ является n-кратной T-надстройкой пространства $T = (\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 - \{0\})$, то есть, пространством $T \wedge T \wedge \ldots \wedge T$. Поскольку матрица Λ заведомо действует не тождественно только на первом сомножителе, доказательство оканчивается применением изоморфизма надстройки к пространству T и использованием утверждения леммы II.4.2. $\square$

Таким образом, мы пришли к общей конструкции гомотетической инволюции в любой представимой теории когомологий.

Определение II.4.4. Пусть $\mathcal{E}$ — симметрический коммутативный кольцевой T-спектр. Для $\lambda \in k^\times$ рассмотрим морфизм $\lambda\colon T \to T$, отправляющий x в λx. Для всякого пространства X этот морфизм задает инволюцию на группах когомологий $E^{*,*}$ следующим образом:

$$\epsilon(\lambda)^* = \Sigma_T^{-1} \lambda^* \Sigma_T \colon E^{*,*} \to E^{*,*}, \tag{II.4.3}$$

где $\Sigma_T\colon E^{*,*} \to E^{*+2,*+1}$ есть T-надстроечный изоморфизм и Σ_T^{-1} — его обратный. Положим $\epsilon = \epsilon(-1)^*$.

Как следует из рассуждений выше, над алгебраически замкнутым полем гомотетическая инволюция тождественна. В следующем разделе мы увидим, что то же выполнено и для ориентируемого T-спектра, в частности, $\epsilon = \mathrm{id}$.

Определение II.4.5 (**Нормализация**). Мы говорим, что функтор $E\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbf{Ab}$ удовлетворяет условию *нормализации* для сепарабельного расширения полей K/k, если для всякого $\lambda \in K^*$ автоморфизм $\Sigma_T^{-1} \lambda^* \Sigma_T \colon E(K) \to E(K)$, индуцированный λ-гомотетией $\mathbb{A}^1_K$ является тождественным (здесь $\Sigma_T\colon E(K) \to$

$E^{[1]}_{\{0\}}(\mathbb{A}_K)$ — изоморфизм T-надстройки). Мы называем функтор E *нормализованным* по отношению к некоторому полю k, если он удовлетворяет условию нормализации для всякого конечного сепарабельного расширения этого поля.

Ниже III.3.7 условие будет показана важность условия нормализации для построения трансферов. В общем случае, существует следующий удобный критерий.

Лемма II.4.6. *Предположим, что отображение* $i^*\colon E(\mathbb{P}^2_K) \to E(\mathbb{P}^1_K)$ *индуцированное некоторым (а значит и любым) стандартным вложением* $\mathbb{P}^1_K \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K$ *сюръективно. Тогда функтор* E *удовлетворяет условию нормализации для поля* K.

Доказательство. Как показано выше, достаточно проверить, что действие матрицы $d = diag(\lambda, 1)$ индуцирует тождественный автоморфизм на $E(\mathbb{P}^1)$. Рассмотрим вложения i_0 и i_1 проективной прямой $\mathbb{P}^1$ в проективную плоскость $\mathbb{P}^2$, заданные морфизмами $i_0\colon (x : y) \mapsto (x : 0 : y)$ и $i_0\colon (x : y) \mapsto (0 : x : y)$, соответственно. Индуцированные отображения i_0^* и i_1^* (оба обозначенные выше как i^*) из $E(\mathbb{P}^2)$ в $E(\mathbb{P}^1)$ совпадают, поскольку функтор E гомотопически инвариантен и морфизм $H\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^2$ заданный как $H((x : y), t) = ((1-t)x : tx : y)$ является гомотопией, связывающей i_0 и i_1. Диагональная матрица $D = diag(\lambda, 1, 1)$ индуцирует автоморфизм D^* проективной плоскости $E(\mathbb{P}^2)$. Имеем: $i_0 d = D i_0$ и $i_1 = D i_1$. Таким образом, $i_0^* D^* = d^* i_0^*$ и $i_1^* D^* = i_1^*$. Поскольку отображение $i_0^* = i_1^*$ сюръективно по предположению, равенство $d^* i_0^* = i_1^*$ влечет $d^* = \mathrm{id}$. □

Пример II.4.7. Всякая ориентируемая теория когомологий удовлетворяет условию нормализации над любым полем. Из ТПР имеем изоморфизм: $E(\mathbb{P}^n_K) \cong E(\operatorname{Spec} K)[x]/(x^{n+1})$. Применяя лемму II.4.6, получаем желаемое.

Пример II.4.8. Рассмотрим сильную (аналитическую) топологию на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Действие, индуцированное умножением на -1 (то есть, действие матрицы $diag(-1,1)$) на вещественной проективной прямой $\mathbb{RP}^1 = S^1$, очевидно, нетождественно в когомологиях $H^1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z})$.

II.5. О некоторых произведениях в (ко)гомологиях

Рассмотрим симметрический T-спектр $\mathcal{E}$ [**41**, стр. 505], снабженный умножением $\mu\colon \mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ и единичным элементом $\iota\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, удовлетворяющими стандартным аксиомам и задающими на $\mathcal{E}$ структуру симметрического коммутативного кольцевого T-спектра.

Кольцевая структура в когомологиях задается $\smile$-произведением, которое будет определено ниже в этом параграфе. Это произведение удовлетворяет следующему закону коммутативности. Для $\alpha \in E^{p,q}$ и $\beta \in E^{p',q'}$, имеем:

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pp'}\epsilon^{qq'}(\beta \smile \alpha), \tag{II.5.1}$$

где $\epsilon\colon E^{*,*} \to E^{*,*}$ — гомотетическая инволюция, описанная в Определении II.4.4.

Лемма II.5.1. *Для ориентируемого T-спектра $\mathcal{E}$ выполнено равенство* $\epsilon = \mathrm{id}$.

Доказательство. Мы покажем, что для всякого $\lambda \in k^{\times}$ верно, что $\Sigma_T^{-1}\lambda^*\Sigma_T = \mathrm{id}$. Следуя [**85**] заметим, что $T \simeq \mathbb{P}^1/\,\mathrm{pt}$ и морфизм λ отвечает эндоморфизму проективной прямой $\mathbb{P}^1$ (сохраняющему выделенную точку 0) отображающему $[x : y]$ в $[\lambda x : y]$. Пусть $i\colon \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ — линейное вложение. Поскольку $\gamma|_{\mathbb{P}^1} = \Sigma_T(1)$, лемма II.5.2 показывает, что отображение $i^{*,*}\colon E^{*,*}(\mathbb{P}^2) \to E^{*,*}(\mathbb{P}^1)$ — эпиморфизм, что доказывает утверждение в силу критерия из леммы II.4.6. □

Лемма II.5.2. *Группа* $E^{*,*}(\mathbb{P}^1 \times X)$ *является свободным* $E^{*,*}(X)$*-модулем. В качестве базиса можно выбрать набор* $\{1, \Sigma_T(1)\}$.

Доказательство. Для всякого симметрического коммутативного кольцевого T-спектра $\mathcal{E}$ отображение $E^{*,*}(\mathbb{P}^1) \otimes_{E^{*,*}(\mathrm{pt})} E^{*,*}(X) \to E^{*,*}(\mathbb{P}^1 \times X)$ является изоморфизмом[1]. Таким образом, остается лишь показать, что $\{1, \Sigma_T(1)\}$ образуют $E^{*,*}(\mathrm{pt})$-базис модуля $E^{*,*}(\mathbb{P}^1)$. Заметим, что поскольку морфизм $\mathbb{P}^1 \to \mathrm{pt}$ имеет сечение, $E^{*,*}(\mathbb{P}^1) = E^{*,*}(\mathrm{pt}) \oplus E^{*,*}(\mathbb{P}^1/\{\infty\})$. Используя свойство вырезания и гомотопическую инвариантность, последний $E^{*,*}(\mathrm{pt})$-бимодуль в правой части может быть записан как

(II.5.2)

$$E^{*,*}(\mathbb{P}^1/\{\infty\}) = E^{*,*}(\mathbb{P}^1/\mathbb{A}^1) = E^{*,*}(\mathbb{A}^1/\mathbb{A}^1{-}\{0\}) = E^{*,*}(T) \overset{\Sigma_T^{-1}}{\simeq} E^{*,*}(\mathrm{pt})(-1)[-$$

□

Замечание II.5.3. Полезно отметить, что для ориентируемого T-спектра $\mathcal{E}$ множество $\{1, \Sigma_T(1)\}$ также образует базис и для $E^0(\mathrm{pt})$-модуля $E^0(\mathbb{P}^1)$.

---

[1] Этот несложный факт будет обсуждаться подробнее в доказательстве предложения III.5.25

Таким образом, для ориентируемого T-спектра $\epsilon = \mathrm{id}$ и условие коммутативности редуцируется к следующему классическому виду: $\alpha \smile \beta = (-1)^{pp'}(\beta \smile \alpha)$. В этом случае часто бывает удобным рассматривать следующие группы: $E^0 = \oplus_{p,q} E^{2p,q}$, $E^1 = \oplus_{p,q} E^{2p-1,q}$, $E_0 = \oplus_{p,q} E_{2p,q}$, и $E_1 = \oplus_{p,q} E_{2p-1,q}$, где $E^{*,*}$ (соотв. $E_{*,*}$) — группы (ко-)гомологий, представимые T-спектром $\mathcal{E}$. Функторы $E^* = E^0 \oplus E^1 \colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbb{Z}/2\text{-}\mathbf{Ab}$ и $E_* = E_0 \oplus E_1 \colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbb{Z}/2\text{-}\mathbf{Ab}$ суть теории (ко)гомологий, принимающие значения в категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных абелевых групп.

Мультипликативность T-спектра $\mathcal{E}$ позволяет (ср. [**78**, 13.50]) каноническим способом снабдить функторы E^* и E_* набором произведений, состоящим из двух внешних $\times$-произведений (когомологического и гомологического)

$$\underline{\times} \colon E_p(X) \otimes E_q(Y) \to E_{p+q}(X \times Y),$$
$$\overline{\times} \colon E^p(X) \otimes E^q(Y) \to E^{p+q}(X \times Y)$$

(когомологическое внешнее произведение обозначается также как $\wedge$) и двух косых произведений:

$$/ \colon E^p(X \times Y) \otimes E_q(Y) \to E^{p-q}(X),$$
$$\backslash \colon E^p(X) \otimes E_q(X \times Y) \to E_{q-p}(Y),$$

заданных следующим образом. Для классов когомологий $\alpha \in E^p(X)$, $\beta \in E^q(Y)$, $\gamma \in E^p(X \wedge Y)$ и элементов в гомологиях: $a \in E_p(X)$, $b \in E_q(Y)$, $c \in E_q(X \wedge Y)$ представленных классами отображений:

- $u \colon \Sigma^p X \to \mathcal{E}$ для α;
- $v \colon \Sigma^q X \to \mathcal{E}$ для β;

- $w\colon \Sigma^p(X \wedge Y) \to \mathcal{E}$ для γ;
- $x\colon S \to \Sigma^p(X \wedge \mathcal{E})$ для a;
- $y\colon S \to \Sigma^q(Y \wedge \mathcal{E})$ для b;
- $z\colon S \to \Sigma^q(X \wedge Y \wedge \mathcal{E})$ для c;

$\alpha \overline{\times} \beta$ задается гомотопическим классом отображения

$$\Sigma^{p+q}(X \wedge Y) = \Sigma^p X \wedge \Sigma^q Y \overset{u \wedge v}{\to} \mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \overset{\mu}{\to} \mathcal{E}; \tag{II.5.3}$$

$\alpha \underline{\times} \beta$ задается гомотопическим классом отображения

(II.5.4)

$$S = S \wedge S \overset{x \wedge y}{\to} \Sigma^{p+q}(X \wedge \mathcal{E}) \wedge (Y \wedge \mathcal{E}) \overset{1 \wedge \tau_{23} \wedge 1}{\to} \Sigma^{p+q}(X \wedge Y \wedge \mathcal{E} \wedge \mathcal{E}) \overset{1 \wedge 1 \wedge \mu}{\to} \Sigma^{p+q}(X \wedge Y \wedge \mathcal{E});$$

γ / b задается гомотопическим классом отображения

$$\Sigma^{p-q} X \simeq \Sigma^{p-q} X \wedge S \overset{1 \wedge y}{\to} \Sigma^p X \wedge Y \wedge \mathcal{E} \overset{v \wedge 1}{\to} \mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \overset{\mu}{\to} \mathcal{E}; \tag{II.5.5}$$

$\alpha \backslash c$ задается гомотопическим классом отображения

(II.5.6)

$$S \overset{z}{\to} \Sigma^q X \wedge Y \wedge \mathcal{E} \overset{u \wedge 1 \wedge 1}{\to} \Sigma^{q-p} \mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \wedge Y \overset{\tau_{12} \wedge 1}{\to} \Sigma^{q-p} Y \wedge \mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \overset{1 \wedge \mu}{\to} \Sigma^{q-p} Y \wedge \mathcal{E}.$$

(Всюду в формулах выше, τ_{ij} обозначает морфизм перемены порядка соответствующих сомножителей. Чтобы избежать возможного возникновения отрицательных надстроек, следует изначально применить оператор Σ^N для $N \gg 0$ к обеим сторонам соответствующего отображения. Так как мы работаем в $\mathbb{A}^1$-стабильной гомотопической категории, подобное действие не изменит окончательного результата.)

После чего определяются внутренние произведения:

$$\smile\colon E^p(X) \otimes E^q(X) \to E^{p+q}(X), \quad \frown\colon E^p(X) \otimes E_q(X) \to E_{q-p}(X),$$

как $\alpha \smile \beta := \Delta^*(\alpha \overline{\times} \beta)$ и $\alpha \frown a := \alpha \backslash \Delta_*(a)$, соответственно. Введение $\smile$-произведения делает группу $E^*(X)$ ассоциативным кососкоммутативным $\mathbb{Z}/2$-градуированным кольцом с единицей, и эта структура функториальна. $\frown$-произведение превращает $E^*(X)$ в унитальный[2] $E^*(X)$-модуль и данная структура функториальна в том смысле, что $\alpha \frown f_*(a) = f_*(f^*(\alpha) \frown a)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения ассоциативности, полностью аналогичные существующим в классическом топологическом случае (см., например, [**78**, 13.61]). Доказательства этих соотношений непосредственно следуют из определений и почти дословно повторяют топологический случай. Для $\alpha \in E^*(X \times Y)$, $\beta \in E^*(Y)$, $\eta \in E^*(X)$, $a \in E_*(Y)$ и $b \in E_*(X)$, имеем:

(**AR.1**) $\alpha/(\beta \frown a) = (\alpha \smile p_Y^*(\beta))/a$,

(**AR.2**) $\eta \smile (\alpha/a) = (p_X^*(\eta) \smile \alpha)/a$,

(**AR.3**) $(\alpha/a) \frown b = p_*^X((\alpha \frown (a \underline{\times} b))$,

где p_X и p_Y обозначают соответствующие морфизмы проекции. Нам также понадобится следующее свойство функториальности /-произведения, также восходящее к топологическому контексту (Ср. [**78**, 13.52.*iii*]). Для морфизмов $f\colon X \to X'$, $g\colon Y \to Y'$ и элементов $\alpha \in E^*(X' \times Y')$ и $a \in E_*(Y)$, имеем: $(f \times g)^*(\alpha)/a = f^*(\alpha/g_*(a))$. Для конечного объекта pt в категории $\mathbf{Sm/k}$ мы, следуя определениям групп (ко-)гомологий, очевидно имеем: $E^*(\mathrm{pt}) = E_*(\mathrm{pt})$. Образ единицы в когомологиях дает нам выделенный элемент $[\mathrm{pt}] \in E_0(\mathrm{pt})$ (фундаментальный класс точки) такой, что для всякого гладкого многообразия X и произвольного элемента $\alpha \in E^*(X)$, получаем: $\alpha/[\mathrm{pt}] = \alpha$. (Здесь и далее мы неявно

---

[2] т.е. такой, что $1 \frown a = a$ для любого $a \in E_*(X)$.

предполагаем стандартное отождествление $X \times \mathrm{pt} = X$.) Легко проверить, что канонический изоморфизм $E^*(\mathrm{pt}) = E_*(\mathrm{pt})$ может быть переписан как $\alpha \mapsto \alpha \frown [\mathrm{pt}]$. В продолжение данной работы мы неоднократно будем неявно использовать эту конструкцию и обычно обозначать $[\mathrm{pt}]$ через 1.

II.6. Примеры функторов когомологий

В данном разделе мы дадим краткое описание некоторых важных примеров теорий когомологий. Как будет показано далее (см. III.4, III.5, IV), для всех этих примеров выполнена та или иная форма теоремы жесткости и в большинстве случаев (для ориентируемых функторов) теорема двойственности Пуанкаре. Конечно, для выполнения условий теоремы жесткости рассматриваемые функторы должны быть взяты с конечными коэффициентами. Перед тем, как рассматривать конкретные примеры теорий, приведем один общий способ, позволяющий получать новые ориентируемые теории на базе уже имеющихся.

Зафиксируем многообразие $Y \in \mathbf{Sm/k}$ и рассмотрим функтор $\mathfrak{V}\colon \mathbf{Sm^2/k} \to \mathbf{Sm^2/k}$, заданный следующим образом: $\mathfrak{V}(X, U) = (Y \times X, Y \times U)$ для $(X, U) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Sm^2/k})$ и $\mathfrak{V}(f) = \mathrm{id}_Y \times f$ для $f \in \mathbf{Mor}(\mathbf{Sm^2/k})$. Пусть $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$ — семейство функторов. Обозначим функтор композиции $E^{*,*} \circ \mathfrak{V}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$ через ${}^Y E^{*,*}$.

Предложение II.6.1. *Предположим, что* $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Gr\text{-}Ab}$ *— ориентируемая теория. Тогда, для всякого многообразия* $Y \in \mathbf{Sm/k}$ *семейство* ${}^Y E^{*,*}$ *также задает ориентируемую теорию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, во-первых, что отображение обратного образа $\mathfrak{v}\colon E^{*,*}(-) \to E^{*,*}(Y \times -)$ определяет естественное преобразование функторов $\mathfrak{v}\colon E^{*,*} \to {}^{Y}E^{*,*}$. Аксиомы Стинрода–Эйленберга II.1.8—II.1.10 немедленно следуют из определения этого естественного преобразования. Аксиома гомотопической чистоты для пары (X, Z) и функтора ${}^{Y}E^{*,*}$ эквивалентна гомотопической чистоте для пары $(Y \times X, Y \times Z)$ и исходного функтора $E^{*,*}$. Кольцевая структура для ${}^{Y}E^{*,*}$, очевидно, наследуется с исходной на $E^{*,*}$. Наконец, мы определяем первый класс Черна линейного расслоения $\mathcal{L}$ над X как ${}^{Y}E^{2,1}(X) \ni \tilde{c}_1(\mathcal{L}) := \mathfrak{v}^*(c_1(\mathcal{L}))$. После подобного определения, ТПР легко проверяется[3]. □

II.6.i. Классические ориентируемые теории. Этальные когомологии и К-теория. Рассмотрим, вначале, случай этальных когомологий. Положим: $E_Z^{p,q}(X) = H_Z^p(X_{et}, \mu_n^{\otimes q})$, где μ_n — пучок корней степени n из единицы $(n, \mathrm{Char}\, k) = 1$. Все необходимые нам свойства этого функтора проверены в книге [**52**]. Проверка аксиом локализации, вырезания и гомотопической инвариантности составляет содержание предложений III.1.25, III.1.27, и следствия VI.4.20 *loc.cit*, соответственно. Мультипликативная структура на когомологиях обсуждается в V.1. Наконец, теория классов Черна развита в разделе VI.10.

Перейдем теперь к алгебраической K-теории.

Чтобы рассмотреть K-функтор в контексте ориентируемых функторов, нам необходимо, во-первых, выбрать модель, вычисляющую K-теорию пар и функториальную относительно их

---

[3] Предполагая, что теория задана T-спектром, можно провести альтернативное доказательство, использующее представимость и сопряженные спектры.

морфизмов. Для достижения этой цели, положим $E_Z^{p,q}(X) := K_{2q-p}(X \operatorname{on} Z)$, где группы справа — K-группы Томасона–Тробо (Thomason–Trobaugh) (see [**79**]). Точная последовательность локализации приведена в [**79**, Теорема 5.1], свойство вырезания следует из [**79**, 3.19]. Разделы 4.1.–4.12. работы [**79**] посвящены доказательству ТПР.

Для гладкого квази-проективного многообразия X и его замкнутой подсхемы Z показано, что $K_*(X \operatorname{on} Z) = K'_*(Z)$, где группы справа представляют собой Квилленовские (Quillen's) группы категории когерентных пучков. Поскольку эти группы гомотопически инвариантны [**68**, Предложение 7.4.1], то же, конечно, верно и для левой части. Также выполнена и аксиома гомотопической чистоты.

Стартуя со спаривания, построенного в [**79**, 3.15]:

$$K(X \operatorname{on} Y) \wedge K(X \operatorname{on} Z) \to K(X \operatorname{on} Y \frown Z), \tag{II.6.1}$$

мы легко получаем произведение на $E^{*,*}$, удовлетворяющее желаемым условиям.

Наконец, чтобы определить классы Черна, положим:

$$c_1(\mathcal{L}) = [\mathbf{1}] - [\mathcal{L}^\vee] \in K_0(X) \tag{II.6.2}$$

для линейного расслоения $\mathcal{L}$ над X.

II.6.ii. Неориентируемые теории. Три наиболее важных примера неориентируемых теорий когомологий — стабильные алгебраические когомотопии, т.е. универсальная неориентируемая теория, высшие группы Витта W^*, введенные Бальмером [**13**] и функтор Эрмитовой K-теории KO^*. Как можно было ожидать, почти ничего не известно о свойствах стабильных когомотопий. Функторы KO^* и W^* исходно были определены как однократно градуированные теории и являются представимыми соответствующими $\mathbb{G}_m$-спектрами. Эта трудность была, однако, преодолена в работе Хорнбостеля [**33**], который показал, что возможно так определить вторую градуировку, что рассматриваемые функторы станут теориями когомологий, представимыми T-спектрами, т.е. «теориями» в нашем смысле.

II.6.iii. Мотивные когомологии. Для гладкого многообразия X над полем k определим его *мотив* $M(X)$ как объект в категории $\mathbf{DM}^-(\mathbf{k})$, заданный комплексом $C^*(\mathbb{Z}_{tr}(X))$ (см. определение непосредственно перед [**76**, Теорема 1.5]).

Мы определяем группы мотивных когомологий $H^{p,q}_{\mathcal{M}}(X)$ многообразия X как гиперкогомологии комплекса пучков в топологии Зарисского $H^p_{Zar}(X, \mathbb{Z}(q))$, где $\mathbb{Z}(n) = M(\mathbb{G}_m^{\wedge n})[-n]$ (см. [**76**, Definition 3.1]).

Следствие 1.2 и теорема 1.5 из [**76**] утверждают, что:

$$(\text{II.6.3}) \qquad H^{p,q}_{\mathcal{M}}(X) = H^p_{Nis}(X, \mathbb{Z}(q)) = Hom_{\mathbf{DM}^-(\mathbf{k})}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]).$$

Для гладкого многообразия X и его замкнутого подмножества Z определим мотив с носителем $M_Z(X)$ как $C^*(\mathbb{Z}_{tr}(X)/\mathbb{Z}_{tr}(X-Z))$ (см. доказательство [**76**, Lemma 4.11]).

Теперь определим $H^{p,q}_{\mathcal{M};Z}(X)$ как группу $Hom_{\mathbf{DM}^-}(M_Z(X), \mathbb{Z}(q)[p])$ (см. [**76**, Теорема 1.5] и доказательство [**76**, Corollary 8.4]).

Для того, чтобы проверить в рассматриваемом случае большинство аксиом Стинрода–Эйленберга, мы опишем T-спектр, представляющий мотивные когомологии. Этот спектр является алгебраическим мотивным аналогом спектра Эйленберга–Мак Лейна (Eilenberg–Mac Lane spectrum) в топологии, ассоциирован с кольцом R, и обозначается через $\mathbf{H}_R$ (определение см. [**86**, Section 6.1]).

Тогда мотивные когомологии гладкого многообразия X над полем k, допускающим разрешение особенностей, задаются как:

$$H^{p,q}_{\mathcal{M}}(X,R) = Hom_{\mathbf{SHot}}\left(\Sigma^{\infty}_{T}(X_+), \mathbf{H}_R(q)[p]\right). \tag{II.6.4}$$

В [**86**, Section 6.1] показано, что эта конструкция дает нам в точности те же группы мотивных когомологий, как упоминалось ранее. Поскольку мотивные когомологии представимы T-спектром, мы можем применить результаты параграфа II.3.ii, чтобы проверить выполнимость аксиом.

Замечание II.6.2. Конечно, все эти аксиомы могут быть проверены и непосредственно, опираясь на первое определение, путем рассуждений, вовлекающих точные треугольники в категории мотивов.

Сейчас мы определим $\smile$-произведение в мотивных когомологиях, удовлетворяющее требованиям аксиомы II.1.12. Рассмотрим, во-первых, короткую точную последовательность пучков с трансферами:

$$0 \to \mathbb{Z}_{tr}(X-Z) \to \mathbb{Z}_{tr}(X) \to \mathbb{Z}_{tr}(X)/\mathbb{Z}_{tr}(X-Z) \to 0. \tag{II.6.5}$$

Поскольку тензорное произведение $\otimes_{tr}$ с пучком $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ является точным справа функтором в категории пучков Нисневича с трансферами и $\mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes \mathbb{Z}_{tr}(Y) = \mathbb{Z}_{tr}(X \times Y)$ (см. [**76**, текст непосредственно после леммы 2.1.]), мы имеем канонический изоморфизм пучков с трансферами

(II.6.6)

$$\mathbb{Z}_{tr}(X) \otimes (\mathbb{Z}_{tr}(X)/\mathbb{Z}_{tr}(X - Z)) = \mathbb{Z}_{tr}(X \times X)/\mathbb{Z}_{tr}(X \times X - X \times Z).$$

Применяя к обеим частям равенства функтор C^*, получаем канонический изоморфизм мотивов $M_{X \times Z}(X \times X) = M(X) \otimes M_Z(X)$. Мы определим $\smile$-произведение элементов $a \in H^{p,q}_{\mathcal{M}}(X)$ и $b \in H^{r,s}_{\mathcal{M};Z}(X)$ как композицию отображений

(II.6.7)

$$\begin{tikzcd}
M_Z(X) \arrow[rr, "\smile"] \arrow[d, "\Delta_*"'] & & \mathbb{Z}_{tr}(q+s)[p+r] \arrow[d, equal] \\
M_{X \times Z}(X \times X) \arrow[r, equal] & M(X) \otimes M_Z(X) \arrow[r, "a \otimes b"] & \mathbb{Z}_{tr}(q)[p] \otimes \mathbb{Z}_{tr}(s)[r],
\end{tikzcd}$$

где Δ_* индуцировано диагональным морфизмом, а вертикальный знак равенства справа следует из [**76**, Lemma 3.2].

Нам осталось определить классы Черна. По [**76**, Corollary 3.2.1] группа $H^{2,1}_{\mathcal{M}}(X)$ гладкого многообразия X канонически изоморфна его группе Пикара (Picard group) $\mathrm{Pic}(X)$. Мы полагаем $c_1(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}] \in \mathrm{Pic}(X)$ для линейного расслоения $\mathcal{L}$ над X. Очевидно, что аксиома II.1.16 выполняется для так определенных классов Черна. Наконец, в теореме [**76**, 4.5] вычислен мотив проективизации n-мерного векторного расслоения $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ в терминах мотива X:

$$\text{(II.6.8)} \qquad M\left(\mathbb{P}(\mathcal{E})\right) = M(X) \oplus M(X)(1)[2] \oplus \cdots \oplus M(X)(n)[2n]$$

и теорема [**76**, 4.12] заканчивает доказательство ТПР. Основной результат работы [**89**] позволяет нам также избавиться от предположения, что наше основное поле допускает «разрешение особенностей», возникающего в [**76**, 4.12].

II.6.iv. Алгебраические кобордизмы. Начнем с напоминания конструкции Воеводского [**86**, Section 6.3] спектра $\mathbf{MGL} = (MGL(n), c_n)$, представляющего алгебраические кобордизмы. Обозначим через $Gr(n, N)$ грассманово многообразие n-мерных плоскостей в пространстве $\mathbb{A}^N$. Канонические вложения $\mathbb{A}^N \hookrightarrow \mathbb{A}^{N+1}$ индуцируют морфизмы $Gr(n, N) \hookrightarrow Gr(n, N+1)$. Мы обозначаем индуктивный предел полученной системы $\varinjlim\limits_N Gr(n, N)$ через $Gr(n)$. Пусть $\gamma_{n,N}$ обозначает тавтологическое векторное расслоение над $Gr(n, N)$. Следуя Воеводскому [**86**], мы определяем пространство Тома векторного расслоения $\mathcal{V}$ над X как $\mathrm{Th}(\mathcal{V}) \overset{def}{=} \mathcal{V}/(\mathcal{V} - s(X))$, где $s\colon X \to \mathcal{V}$ — нулевое сечение. Вложения $Gr(n, N) \hookrightarrow Gr(n, N+1)$ индуцируют морфизмы $\mathrm{Th}(\gamma_{n,N}) \to \mathrm{Th}(\gamma_{n,N+1})$. Мы полагаем $MGL(n) = \varinjlim\limits_N \mathrm{Th}(\gamma_{n,N})$.

Таким образом, отображения вложения $Gr(n, N) \overset{f_n}{\hookrightarrow} Gr(n+1, N+1)$, заданные как $f_n(x) = \mathbf{1} \oplus x$, индуцируют канонические расщепления $f^*(\gamma_{n+1,N+1}) \simeq \mathbf{1} \oplus \gamma_{n,N}$, которые, вместе с каноническими морфизмами $\Sigma_T \mathrm{Th}(\gamma_{n,N}) \simeq \mathrm{Th}(\mathbf{1} \oplus \gamma_{n,N})$, позволяют нам определить структурные отображения в конструируемом спектре: $c_n\colon T \wedge MGL(n) \to MGL(n+1)$.

Поскольку алгебраические кобордизмы являются, по определению, теорией когомологий, представимой только что построенным T-спектром, мы можем применить предложение II.3.2 чтобы проверить, что для этой теории выполнены аксиомы Стинрода–Эйленберга и свойство гомотопической чистоты.

Как было анонсировано в докладе Воеводскоо в MSRI [**87**], алгебраические кобордизмы имеют мультипликативную структуру и допускают построение классов Черна (См. также Ф.Морель (F.Morel) [**54**, p.140]). По-видимому, впервые явные конструкции были опубликованы в работе Панина и автора [**64**].

Сначала мы снабдим спектр **MGL** мультипликативной структурой. Для этого, мы обогатим структуру T-спектра на **MGL**, добавив действие некоторой специальной операды, которое превратит наш спектр в симметрический T-спектр (определение мотивного симметрического спектра см. Жардин (Jardin) [**41**]). Впоследствии, мы покажем, что полученный симметрический спектр слабо эквивалентен исходному спектру в категории T-спектров. Альтернативный подход к описываемому действию может быть найден в [**36**]. Начнем с построения желаемой операды. Обозначим через $\mathfrak{V}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) множество всех сохраняющих естественный порядок биекций между $\mathbb{N}$ и $\underbrace{\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{N}}_{k}$. Множество в правой части имеет естественную структуру частично-упорядоченного множества, в котором два элемента сравнимы тогда, и только тогда, когда они лежат в одной и той же $\mathbb{N}$-компоненте. Биекция называется сохраняющей порядок, если она является морфизмом в категории частично-упорядоченных множеств.

Несложно проверить, что существование и свойства отображения $\mathfrak{V}_m \times \mathfrak{V}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{V}_{n_m} \to \mathfrak{V}_{n_1+n_2+\cdots+n_m}$, заданного композицией биекций

$$\text{(II.6.9)} \qquad \mathbb{N} \overset{\mathfrak{V}_m}{\to} \underbrace{\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{N}}_{m} \overset{\mathfrak{V}_{n_1} \sqcup \cdots \sqcup \mathfrak{V}_{n_m}}{\longrightarrow} \underbrace{\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{N}}_{n_1+n_2+\cdots+n_m}$$

и естественное действие симметрической группы n-перестановок Σ_n на $\mathfrak{V}_n$, снабжает это семейство множеств структурой операды.

Зафиксируем отображение $\Phi\colon \mathbb{N} \to k[x_1, x_2, \ldots]$, полагая $\Phi(n) = x_n$. Выберем семейство биекций $\{\mathfrak{v}_i \in \mathfrak{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Сделанный выбор, совместно с отображением Φ дает нам для векторного пространства $V = \mathbb{A}^\infty$ семейство изоморфизмов между $V^{\times i} = V \times V \times \cdots \times V$ и V. (Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы обозначаем изоморфизмы из этого семейства $\mathfrak{v}_i$.) Нам также понадобится фиксированная выделенная точка e в $\mathbb{P}(V)$, которую мы будем отождествлять с образом в $\mathbb{P}(V)$ стандартного вложения $\mathbb{A}^1$ в $\mathbb{A}^\infty$ по первой координате. Используя введенные понятия, определим естественное вложение грассманновых многообразий $Gr(n) \hookrightarrow Gr(n+1)$ посредством отображения: $\mathfrak{v}_{n+1}(e \oplus \mathfrak{v}_n^{-1})$. Таким же образом мы можем определить произведение $Gr(m) \times Gr(n) \overset{\wedge}{\to} Gr(m+n)$, полагая $a \wedge b = \mathfrak{v}_{m+n}(\mathfrak{v}_m^{-1} \oplus \mathfrak{v}_n^{-1})$ и выделенную точку во всяком грассманниане $Gr(n)$, полагая $e_n = e \wedge e \wedge \cdots \wedge e \in Gr(n)$.

Построим спектр $\mathbb{MGL}$, полагая $\mathbb{MGL}_n = MGL(n)$. Чтобы определить структурные отображения, обозначим через $T(n)$ индуктивный предел тавтологических векторных расслоений над $Gr(n, N)$. Можно легко видеть, что слой $T(n)$ над точкой e_n канонически изоморфен пространству $\mathbb{A}^n$. Пространство Тома $\mathrm{Th}(\mathbb{A}^1)$ совпадает с объектом Тэйта T. Более того, ограничение $T(m+n)$

на образ отображения $Gr(m) \times Gr(n) \xrightarrow{\wedge} Gr(m+n)$ канонически изоморфно $T(m) \wedge T(n)$. Так как, очевидно, $e_m \wedge e_n = e_{m+n}$, мы имеем вложение пространств:

$$\mathbb{MGL}_m \wedge \mathbb{MGL}_n \hookrightarrow \mathbb{MGL}_{m+n}. \tag{II.6.10}$$

Вложение слоя над выделенной точкой в пространство $T(m)$ в композиции с только что введенным отображением произведения, индуцирует структурное отображение спектра:

$$T^{\wedge m} \wedge \mathbb{MGL}_n \hookrightarrow \mathbb{MGL}_{m+n}. \tag{II.6.11}$$

Группа Σ_m действует на n-ой $\wedge$-степени объекта Тэйта $T^{\wedge m}$, переставляя сомножители. Отображения II.6.10 и II.6.11 являются $\Sigma_m \times \Sigma_n$-эквивариантными по отношению к естественному вложению $\Sigma_m \times \Sigma_n \subset \Sigma_{m+n}$.

Отображения II.6.11 задают на семействе пространств $\mathbb{MGL}_n$ структуру коммутативного симметрического T-спектра в определениях Жардина [**41**, Section 4.3].

Чтобы доказать существование эквивалентности между построенным спектром и спектром **MGL** в категории T-спектров, мы построим следующий подспектр M спектра $\mathbb{MGL}$.

Во-первых, рассмотрим подпространство $W \subset V^{\times n}$ порожденное $\underbrace{\langle e, e, \ldots, e\rangle}_{n-1} \oplus V$. (Здесь каждая копия e лежит в соответствующей копии векторного пространства V.) Обозначим через $Gr(n, W)$ подпространство в $Gr(n)$, состоящее из тех n-плоскостей которые попадают в W под действием $\mathfrak{v}_n^{-1}$. Пусть $\gamma_n(W) = \gamma_n \times_{Gr(n)} Gr(n, W)$ обозначает ограничение тавтологического векторного расслоения γ_n на грассманниане $Gr(n)$ на подпространство

$Gr(n, W)$. Мы полагаем $M(n) = \gamma_n(W)/(\gamma_n(W) - s(Gr(n, W)))$. Отображение проекции $\gamma_n(W) \to \gamma_n$ индуцирует естественное вложение $M(n) \hookrightarrow \mathbb{MGL}_n$. Мы определяем структурные отображения в M как ограничения соответствующих структурных отображений в спектре $\mathbb{MGL}$. Конструкция пространств $M(n)$ гарантирует нам, что эти отображения определены корректно.

Несложно видеть, что спектр M слабо эквивалентен **MGL**. (Эквивалентность индуцируется, например, изоморфизмами $\psi_k^*\colon W \xrightarrow{\simeq} V$ заданными следующим образом:

$$\psi_k(x_i) = \begin{cases} x_{i,1} & \text{для } i < k \\ x_{k,i-k+1} & \text{иначе,} \end{cases}$$

где i-я копия пространства V задана как $\operatorname{Spec} k[x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots]$.)

С другой стороны, отображение вложения M в $\mathbb{MGL}$ дает нам отображение T-спектров, являющееся слабой эквивалентностью на каждом уровне. Это влечет искомую слабую эквивалентность спектров.

Далее, мы приведем краткое изложение конструкции классов Черна. Наш подход базируется на идеях Коннера и Флойда (Conner и Floyd [**18**])построения классов Черна в комплексных кобордизмах.

Начнем с построения большой коммутативной диаграммы, которая содержит все морфизмы, необходимые нам в дальнейшем.
(II.6.12)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Th}(L_0) \arrow[r, hook] \arrow[rrrr, dotted, bend left, "\bar{\sigma}"] & \mathrm{Th}(L_1) \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \mathrm{Th}(L_\infty) = MGL(1) \arrow[r, dotted, "e"] & \mathbf{MGL} \\
\mathbb{A}^1 \arrow[r, equal] & L_0 \arrow[r, hook] \arrow[u] \arrow[d, shift right, "p_0"'] & L_1 \arrow[r, hook] \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[d, shift right, "p_1"'] & \cdots \arrow[r, hook] & L_\infty \arrow[u, "\pi_\infty"] \arrow[d, shift right, "p_\infty"'] & \\
\{0\} \arrow[r, equal] & \mathbb{P}_0 \arrow[r, hook] \arrow[u, shift right, "s_0"'] & \mathbb{P}_1 \arrow[r, hook] \arrow[u, shift right, "s_1"'] \arrow[rrruu, dotted, bend right, "c|_{\mathbb{P}^1}"'] & \cdots \arrow[r, hook] & \mathbb{P}_\infty \arrow[u, shift right, "s_\infty"'] \arrow[ruu, dotted, "c"] &
\end{tikzcd}$$

В вышеприведенной диаграмме L_i обозначает тавтологическое векторное расслоение над $\mathbb{P}^i$, p_i — проекции и s_i — соответствующие нулевые сечения. В верхней строке помещаются пространства Тома: $\mathrm{Th}(L_i) = L_i/(L_i - s_i(\mathbb{P}^i))$. В самом правом столбце находятся построчные пределы соответствующих пространств, все пунктирные отображения будут рассматриваться как элементы некоторых групп кобордизмов, которые мы определим ниже. Определим $\bar{\sigma} \in MGL^{2,1}(Th(L_0))$ как результат действия отображения T-надстройки на элемент $1 \in MGL^{0,0}(pt)$. (Напомним, что $\mathrm{Th}(L_0)$ есть в точности пространство T.) Используя аксиому вырезания, мы можем поднять элемент $\bar{\sigma}$ в группу $MGL^{2,1}_{\{0\}}(\mathbb{P}^1) \simeq MGL^{2,1}_{\{0\}}(\mathbb{A}^1) = MGL^{2,1}(T)$. Обозначим через σ результат применения отображения расширения носителей $MGL^{2,1}_{\{0\}}(\mathbb{P}^1) \to MGL^{2,1}(\mathbb{P}^1)$ к $\bar{\sigma}$.

Рассмотрим тождественный автоморфизм спектра $\mathbf{MGL}$. Ограничение этого отображения на первый уровень спектра: $MGL(1) \hookrightarrow \mathbf{MGL}$ определяет ориентирующий класс $e \in MGL^{2,1}(MGL(1))$.

Следуя определению ориентированного T-спектра II.3.1, чтобы сделать функтор алгебраических кобордизмов ориентированным, нам нужно выбрать элемент $\gamma \in MGL^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$ такой, что $\gamma|_{\mathbb{P}^0} = 0$, а ограничение $\gamma|_{\mathbb{P}^1}$ на проективную прямую $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty$ совпадает с σ.

Обозначим:

$$\epsilon = (\pi_\infty \circ s_\infty)^*(e) \in MGL^{2,1}(\mathbb{P}^\infty) \tag{II.6.13}$$

и покажем, что этот элемент является ориентацией. Точнее, имеет место утверждение.

Предложение II.6.3. *Выполнено следующее соотношение:* $\epsilon|_{\mathbb{P}^1} = -\sigma$*.*

Доказательство. Обозначим через $e_i \in MGL^{2,1}(\mathrm{Th}(L_i))$ ограничение элемента $e \in MGL^{2,1}(MGL(1))$ на подпространство $\mathrm{Th}(L_i) \subset MGL(1)$. Тогда, ясно, что $(\pi_1 s_1)^*(e_1) = c|_{\mathbb{P}^1}$ и $e_0 = \sigma$.

Перейдем теперь к рассмотрению проективных линейных расслоений. Применяя аксиому вырезания к открытому вложению $L_i \subset \mathbb{P}(L_i \oplus \mathbf{1})$, а также лемму II.2.2(a), мы получаем следующее индуцированное вложение групп:

(II.6.14)

$$MGL^{*,*}(\mathrm{Th}(L_i)) = MGL^{*,*}_{s(\mathbb{P}^i)}(L_i) = MGL^{*,*}_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(L_i \oplus \mathbf{1})) \subset MGL^{*,*}(\mathbb{P}(L_i \oplus \mathbf{1})).$$

Допуская известную вольность в обозначениях, далее мы будем использовать одинаковые буквы для элементов группы $MGL^{*,*}(\mathrm{Th}(L_i))$ и их образов в $MGL^{*,*}(\mathbb{P}(L_i \oplus \mathbf{1}))$.

Обозначим, на мгновение, образ элемента $a \in MGL^{*,*}_{s(\mathbb{P}^i)}(L_i)$ в $MGL^{*,*}_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(L_i \oplus \mathbf{1}))$ через $\bar{a}$. Пусть также $\bar{s}_i$ обозначает нулевое сечение проекции $\mathbb{P}(L_i \oplus \mathbf{1}) \to \mathbb{P}^i$. Легко проверить, что $s_i^*(a) = \bar{s}_i^*(\bar{a})$ в $MGL(\mathbb{P}^i)$. Ниже мы обозначим $\bar{s}$ через s и $\bar{a}$ через a.

Рассмотрим естественное вложение: $j\colon \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(L_0 \oplus \mathbf{1}) \hookrightarrow \mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1})$. Очевидно: $j^*(e_1) = e_0$. Следовательно, нам достаточно проверить соотношение:

$$s_1^*(e_1) = -j^*(e_1). \tag{II.6.15}$$

Следующее предложение показывает, что желаемое соотношение выполнено для достаточно широкого класса функторов. Применяя, затем, нижеследующее предложение к теории MGL и элементу $e_1 \in MGL^{2,1}(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}))$, мы получим искомое равенство. $\square$

Предложение II.6.4. *Пусть* $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ — *семейство функторов, удовлетворяющее аксиомам Стинрода–Эйленберга (См. II.1.8–II.1.10). Тогда, в вышеприведенных обозначениях, для всякого элемента* $a \in E^{*,*}(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}))$, *обнуляющегося после ограничения на подмногообразие* $\mathbb{P}(L_1) \subset \mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1})$, *выполнено следующее соотношение в* $E^{*,*}(\mathbb{P}^1)$*:*

$$s_1^*(a) = -j^*(a).$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(L_0 \oplus \mathbf{1}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, shift left, "p_0"] & \mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "p_1"'] & \mathbb{P}^2 \\ \mathbb{P}^0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[u, bend left, "s_0"] & \mathbb{P}^1, \arrow[u, bend right, "s_1"'] & \end{tikzcd} \tag{II.6.16}$$

в которой p_0 и p_1 суть отображения проекции. Чтобы построить морфизм f мы отождествляем поверхность $\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1})$ с раздутием $\mathbb{P}^2$ с центром в точке $\{0\}$ таким образом, что нулевое сечение $s_1(\mathbb{P}^1)$ становится исключительным дивизором.

Замечание II.6.5. Такое отождествление возможно, поскольку $s_1(\mathbb{P}^1)$ имеет индекс самопересечения равный -1 и, следовательно, пара $(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}), s_1(\mathbb{P}^1))$ удовлетворяет критерию Кастельнуово (Castelnuovo)(см. например [**31**, V.5.7]).

Снова используя критерий Кастельнуово можно показать, что поверхность, полученная после редукции образа нулевого сечения к точке изоморфна $\mathbb{P}^2$.

Рассмотрим элемент $b = a - p_1^*(s_1^*(a)) \in E(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}))$. (Здесь и далее в этом параграфе мы будем опускать индексацию групп когомологий E, поскольку она не изменяется и мы не нуждаемся в ней.) Так как $p_1 s_1 = \mathrm{id}$, имеем: $s_1^*(b) = 0$ и, следовательно, $b \in E_{\mathbb{P}(L_1)}(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}))$ по лемме II.2.2(b).

Из лемм II.6.6 и II.6.7 ниже, следует, что группа $E_{\mathbb{P}(L_1)}(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}))$ вкладывается в $E(\mathbb{P}^2)$. Обозначим через $s_L \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1})$ сечение, отождествляющее базу $\mathbb{P}^1$ с подмногообразием $\mathbb{P}(L_1)$. Поскольку оба морфизма $fj, fs_L \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ индуцированы вложением линейных пространств, легко видеть (Lemma II.6.8), что выполнено следующее равенство: $(fj)^* = (fs_L)^*$. В частности, имеем:

$$j^*(b) = s_L^*(b) \in E(\mathbb{P}^1). \qquad \text{(II.6.17)}$$

Используя наши предположения и лемму II.2.2(a), получаем: $a \in E_{\mathbb{P}(1)}(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1})) \subset E(\mathbb{P}(L_1 \oplus \mathbf{1}))$. Это означает, что $j^*(a) \in E_{\{0\}}(\mathbb{P}^1) \subset E(\mathbb{P}^1)$. Поскольку элемент $j^*(a)$ заведомо обнуляется после ограничения на любую точку проективной прямой, отличную от $\{0\}$, он должен также, по свойству гомотопической инвариантности, принимать значение 0 и над точкой $\{0\}$. Несложное вычисление заканчивает наше доказательство:

(II.6.18)

$$(s_1 \circ p_1 \circ j)^*(a) = (s_1 \circ i \circ p_0)^*(a) = (j \circ s_0 \circ p_0)^*(a) = p_0^*(s_0^*(j^*(a))) = p_0^*(0) = 0.$$

Таким образом, имеем:

$$j^*(b) = j^*(a) - (s_1 \circ p_1 \circ j)^*(a) = j^*(a). \tag{II.6.19}$$

С другой стороны, нам известно, что $s_L^*(a) = 0$. Таким образом: $s_L^*(b) = s_L^*(a) - (s_1 \circ p_1 \circ s_L)^*(a) = -s_1^*(a)$. (Напомним, что s_L является сечением p_1.) Комбинируя последнее равенство с II.6.17 и II.6.19, мы получаем желаемое соотношение. □

Нам осталось лишь доказать три леммы. Во всех трех случаях мы будем придерживаться обозначений предыдущего предложения.

Лемма II.6.6. *Следующее отображение обратного образа — изоморфизм:*

$$E_{f(\mathbb{P}(L_1))}(\mathbb{P}^2) \to E_{\mathbb{P}(L_1)}(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus L_1)).$$

Доказательство. Морфизм $g = f|_{\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus L_1)-\mathbb{P}(1)}$ отождествляет многообразия $\mathbb{P}(1 \oplus L_1) - \mathbb{P}(1)$ и $\mathbb{P}^2 - \{x\}$, где точка $\{x\}$ является образом $\mathbb{P}(1)$ после отображения редукции f. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} E_{\mathbb{P}(L_1)}(\mathbb{P}(1 \oplus L_1)) \arrow[r] & E_{\mathbb{P}(L_1)}(\mathbb{P}(1 \oplus L_1) - \mathbb{P}(1)) \\ E_{f(\mathbb{P}(L_1))}(\mathbb{P}^2) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r] & E_{f(\mathbb{P}(L_1))}(\mathbb{P}^2 - \{x\}). \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd} \tag{II.6.20}$$

Отображение g^* в этой диаграмме является изоморфизмом. Обе горизонтальных стрелки — изоморфизмы вырезания. Следовательно, отображение f^* — также изоморфизм. □

Лемма II.6.7. *Отображение расширения носителя* $E_{f(\mathbb{P}(L_1))}(\mathbb{P}^2) \to E(\mathbb{P}^2)$ *— инъективно.*

Доказательство. Рассматривая пару $(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 - f(\mathbb{P}(L_1)))$, можно заметить, что $\mathbb{P}^2 - f(\mathbb{P}(L_1))$ — аффинная плоскость $\mathbb{A}^2$. Таким образом, отображение обратного образа $E(\mathbb{P}^2) \to E(\mathbb{P}^2 - f(\mathbb{P}(L_1)))$ сюръективно. Следовательно, длинная точная последовательность локализации пары $(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 - f(\mathbb{P}(L_1)))$ распадается на короткие точные фрагменты. Это заканчивает доказательство леммы. □

Лемма II.6.8. *Пусть* V *и* W *— векторные пространства над* k *такие, что* $\dim V < \dim W < \infty$. *Пусть также* $\bar{i}_1, \bar{i}_2 \colon V \hookrightarrow W$ *— два линейных вложения, индуцирующие соответствующие вложения линейных пространств:* $i_1, i_2 \colon \mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(W)$. *Тогда, два отображения обратного образа* $i_1^*, i_2^* \colon E(\mathbb{P}(W)) \to E(\mathbb{P}(V))$ *совпадают.*

Доказательство. Можно построить линейный автоморфизм $\varphi \colon W \to W$ такой, что $\varphi \circ \bar{i}_1 = \bar{i}_2$ и $\det \varphi = 1$. Желаемое утверждение следует из леммы II.4.1. □

Заметим, что построенный нами элемент ϵ является, на языке работы [**63**] «ориентацией Черна», в то время как элемент γ в данном случае является неканонической ориентацией. Чтобы построить «правильную» ориентацию, отвечающую нашему определению II.1.21, т.е. «ориентацию Тома» в терминах работы [**63**], необходимо выполнить следующую процедуру.

Применим конструкцию II.3.1 к элементу ϵ (вместо используемой в II.3.1 ориентации γ). Таким образом, мы получим некоторую структуру Черна $\tilde{c}$ на $\mathbf{MGL}^*$. Положим, теперь, $\tilde{\gamma} = \tilde{c}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^\infty}(1)) \in \mathbf{MGL}^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$.

Предложение II.6.9. *Построенный нами элемент $\tilde{\gamma}$ является ориентацией (Тома) симметрического коммутативного кольцевого T-спектра* $\mathbf{MGL}$.

Доказательство. Очевидно, $\gamma|_{\mathbb{P}^0} = 0$. Поскольку существование структуры Черна влечет ТПР (см. [**60**]), а ее задание фиксирует отвечающий нашей теории формальный групповой закон (см. *loc. cit.*), из формулы для класса Черна тензорного произведения линейных расслоений, получаем:

(II.6.21)

$$0 = \tilde{c}(1) = \tilde{c}(\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O}(1)) = \epsilon + \tilde{\gamma} + \text{члены высших степеней.}$$

Таким образом, после ограничения на $\mathbb{P}^1$, получаем:

$$\tilde{\gamma}|_{\mathbb{P}^1} = \tilde{c}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = -\tilde{c}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = -\epsilon|_{\mathbb{P}^1} = \Sigma_T(1). \qquad \text{(II.6.22)}$$

$\square$

Глава III

Жесткость для теорий когомологий

Целью настоящей главы является доказательство теорем жесткости для различных когомологических функторов на категории гладких многообразий над полем k. Исследования, касающиеся феномена жесткости для алгебраической K-теории, проводились ранее в работах Суслина [**73**], Суслина–Воеводского [**75**], Габбера (Gabber) [**24**], Жилле–Томасона (Gillet–Thomason) [**25**]), для эрмитовой K-теории — в работах Каруби (Karoubi) [**44**] и Жардина (Jardine) [**42**] и, наконец, для групп Витта – Кнебушем (Knebusch) [**46**] и Шарлау (Scharlau) [**72**, стр. 208]. В работе Суслина–Воеводского [**75**] доказывается теорема жесткости для функторов с трансферами.

Общий случай теорем жесткости для произвольной экстраординарной теории когомологий на категории алгебраических многообразий был впервые рассмотрен автором в работах [**64, 95, 34**] в соавторстве с Паниным [**64**] и Хорнбостелем (Hornbostel) [**34**].

В данной главе мы вводим понятие функтора со слабыми трансферами — III.1, показываем, что всякая ориентируемая теория является функтором со слабыми трансферами — III.2. В разделе III.3 мы строим трансферы Беккера-Готтлиба (Becker-Gottlieb) для псевдо-теорий (неориентируемый случай). Чтобы построить желаемые трансферы мы «пересаживаем» топологические конструкции (см., например, [**10, 71, 14**]) на «почву» алгебраической геометрии. Раздел III.4 посвящен доказательству теоремы жесткости и некоторых ее следствий. Наконец, в разделе III.5 мы рассматриваем феномен жесткости для гензелевых локальных колец.

Рассмотрим некоторую категорию схем (топологических пространств) $\mathcal{S}$ над базовой схемой (пространством) B вместе с некоторой теорией когомологий на этой категории $E^*\colon \mathcal{S}^\circ \to \mathbf{Ab}$. Тогда мы говорим, что теория E^* обладает *жесткостью*, если для всякой неприводимой схемы (линейно-связного пространства) $X \xrightarrow{\chi} B$ из $\mathcal{S}$ произвольные сечения $\sigma_0, \sigma_1\colon B \to X$ структурного морфизма χ индуцируют совпадающие гомоморфизмы $\sigma_0^* = \sigma_1^*\colon E^*(X) \to E^*(B)$.

В «классическом» контексте алгебраической топологии свойство жесткости является очевидным следствием гомотопической инвариантности функтора когомологий. Однако, в алгебро-геометрическом случае, $\mathbb{A}^1$-инвариантность, вообще говоря, не влечет жесткость. Феномен жесткости может быть установлен при некоторых дополнительных условиях (ориентируемость, условие нормализации, конечные коэффициенты), наложенных на теорию E^*, а также, возможно, после наложения некоторых условий на сечения (что имеет место, например, при рассмотрении жесткости для локальных гензелевых колец). На примере алгебраической K-теории несложно видеть, что уже функтор K_1 с целыми коэффициентами не обладает жесткостью, хотя K-функтор и является ориентируемой теорией когомологий на категории алгебраических многообразий. Как следует из результатов Суслина [**73**] (см. также доказанную ниже теорему III.4.6), выполнение условия жесткости влечет изоморфизм $K_i(F) \cong K_i(G)$ для расширения алгебраически замкнутых полей

$F \subset G$. Так как для всякого поля k верно, что: $K_1(k) = k^*$, мы получаем противоречие: $F = G$.

В то же время, как несложно видеть, жесткость является более «тонким» свойством, чем гомотопическая инвариантность. Именно, выполнена следующая лемма.

Лемма III.0.1. *Если функтор* $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ *удовлетворяет условию жесткости над базовым многообразием*[1] $Y = X \times \mathbb{A}^1$, *то отображение проекции* $p\colon Y \to X$ *индуцирует изоморфизм* $\mathcal{F}(X) \simeq \mathcal{F}(Y)$.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}\mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r, "\mu^*"] & \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1) \arrow[r, shift left, "i_0^*"] \arrow[r, shift right, "i_1^*"'] & \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1),\end{tikzcd}$$

в которой μ^* индуцировано морфизмом произведения $\mu\colon \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, а отображения i_0^* и i_1^* — специализациями в рациональные точки 0 и 1 на $\mathbb{A}^1$. По предположению леммы, рассматриваемая диаграмма коммутативна. Отображение μi_1 тождественно, а композиция μi_0 совпадает с $Y \xrightarrow{p} X \xrightarrow{i} Y$, где i — вложение посредством нулевого сечения. Таким образом, i^* является правым обратным к p^*. Тождественная композиция $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} X$ показывает, что i^* является и левым обратным. □

Таким образом, выполнение свойства жесткости для всех многообразий влечет гомотопическую инвариантность функтора $\mathcal{F}$.

---

[1] То есть для всякого многообразия над Y специализация в рациональную Y-точку не зависит от выбора точки.

III.1. Функторы со слабыми трансферами

В этой главе мы будем строить и изучать функторы когомологического типа, снабженные отображениями трансфера (т.е. отображениями, действующими в «неестественную» сторону) для некоторого фиксированного класса морфизмов $\mathfrak{C} \subset \mathbf{Mor}(\mathbf{Sm}/\mathbf{k})$.

Мы будем использовать термин $\mathfrak{C}$-морфизм, чтобы обозначить принадлежность рассматриваемого морфизма к соответствующему классу.

Ниже, рассматриваются три варианта класса $\mathfrak{C}$: класс всех проективных морфизмов C_{proj}, класс конечных проективных морфизмов C_{pfin}, либо, наконец, играющий важную роль при рассмотрении неориентируемого случая, класс C_{triv} морфизмов с тривиальным нормальным расслоением, который мы определим в следующем абзаце. Мы также предполагаем, что морфизмы всех вышеупомянутых классов снабжены некоторой декомпозицией. Точнее, элементами класса C_{proj} (C_{pfin}) являются пары $f^\tau\colon X \to Y$, где проективный морфизм $f\colon X \to Y$ разложен в композицию $f\colon X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} Y$ с замкнутым вложением τ и проекцией p.

Определение III.1.1. Обозначим через C_{triv} класс оснащенных морфизмов (f, τ, Θ) где для f выбрано разложение $f\colon X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{p} Y$ такое, что τ — замкнутое вложение с тривиальным нормальным расслоением $\mathcal{N}_{Y\times\mathbb{A}^n/X}$, p — морфизм проекции, а $\Theta\colon \mathcal{N}_{Y\times\mathbb{A}^n/X} \cong X \times \mathbb{A}^N$ — тривиализация нормального расслоения.

Замечание III.1.2. Начиная с данного места, мы примем следующее соглашение. Пусть $X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times Z \to Y$ — $\mathfrak{C}$-морфизм, снабженный некоторым фиксированным разложением. (Здесь $Z = \mathbb{A}^n$

или $\mathbb{P}^n$.) Пусть f' обозначает замену базы f в соответствии с морфизмом g. Мы всегда будем предполагать, что разложение f' выбрано таким образом, чтобы сделать следующую диаграмму декартовой. При необходимости мы также требуем, чтобы тривиализация Θ' получалась заменой базы из Θ.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, hook, "\tau'"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "f'"] & Y' \times Z \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & Y \times Z \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Другими словами, это означает, что мы должны выбирать вложение $\tau' \colon X' \hookrightarrow Y' \times Z$ (и тривиализацию Θ') канонически, полагая, что τ' является заменой базы τ в соответствии с морфизмом $g \times \mathrm{id}$.

Придерживаясь данного соглашения, в тех случаях, когда разложение и/или тривиализация ясны из контекста, мы будем часто опускать упоминание о τ и Θ в обозначениях.

Пусть $\mathcal{F} \colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ — контравариантный функтор. Предположим, что для всякого $\mathfrak{C}$-морфизма $f^\tau \colon X \to Y$ задано отображение $f^\tau_! \colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ называемое *отображением трансфера*, такое, что семейство всех таких отображений удовлетворяем нижеприведенным свойствам.

Замечание III.1.3. Во всех свойствах, приведенных ниже, мы заботимся о поведении изоморфизма тривиализации Θ. В тех случаях, когда $\mathfrak{C} \neq C_{\mathrm{triv}}$, все, касающееся этого изоморфизма должно быть просто опущено.

Свойство III.1.4. (Трансверсальная замена базы) *Для любого $\mathfrak{C}$-морфизма $f\colon X \to Y$, снабженного разложением $X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times Z \to Y$ и морфизма $g\colon Y' \to Y$ такого, что квадрат*

$$\begin{tikzcd}
X' = Y' \times_Y X \arrow[r, hook, "\tau'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \times Z \arrow[d, "g \times \mathrm{id}"] \\
X \arrow[r, hook, "\tau"] & Y \times Z
\end{tikzcd}$$

трансверсален, диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X') \arrow[r, "f'_!"] & \mathcal{F}(Y') \\
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "f_!"] \arrow[u, "g'^*"] & \mathcal{F}(Y) \arrow[u, "g^*"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Свойство III.1.5. (Финитная аддитивность) *Пусть $X = X_0 \sqcup X_1 \in \mathbf{Sm/k}$ — несвязное объединение подмногообразий X_0 и X_1, $e_m\colon X_m \hookrightarrow X$ $(m = 0, 1)$ суть соответствующие морфизмы вложения, а $(f\colon X \to Y, \tau, \Theta) \in \mathfrak{C}$ $(\operatorname{codim} f = d)$. Полагая $f_{m,!} = (f \circ e_m, \tau \circ e_m, \Theta|_{X_m})_!$, имеем:*

$$f_{0,!}e_0^* + f_{1,!}e_1^* = f_!.$$

Свойство III.1.6. (Нормализация) *Пусть $f = \mathrm{id}\colon \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$. Тогда, для всякого разложения $\mathrm{pt} \overset{\tau}{\hookrightarrow} Z \to \mathrm{pt}$ и произвольно выбранной тривиализации Θ отображение $(f, \tau, \Theta)_!\colon \mathcal{F}(\mathrm{pt}) \to \mathcal{F}(\mathrm{pt})$ тождественно.*

Определение III.1.7. Функтор $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$, снабженный для некоего класса морфизмов $\mathfrak{C}$ семейством трансферов $\{f_!\}_{f \in \mathfrak{C}}$, удовлетворяющих условиям III.1.4-III.1.6, называется *функтором со слабыми трансферами* для этого класса.

Два следующих раздела будут посвящены оснащению трансферами двух важных групп теорий: ориентируемых и представимых (без предположения ориентируемости). В результате этой процедуры мы увидим, что рассматриваемые теории станут функторами со слабыми трансферами для классов C_{proj} и C_{triv}, соответственно.

III.2. Случай ориентируемых теорий

В данном разделе мы полагаем $\mathfrak{C} = C_{\mathrm{proj}}$. Таким образом, наша задача — построить трансферы, соответствующие всем проективным морфизмам. Точнее, в данном разделе будет доказана следующая теорема.

Теорема III.2.1. *Пусть* $E^{*,*}\colon (\mathbf{Sm^2/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ — *ориентируемая теория когомологий. Тогда, для всякого проективного равноразмерностного морфизма* $f\colon X \to Y$ *снабженного декомпозицией* $X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p^Y} Y$ *мы можем канонически построить отображение трансфера (прямого образа)* $f_!^\tau\colon E^{*,*}(X) \to E^{*+2r,*+r}(Y)$ $(r = \dim Y - \dim X)$ *так, что функтор* $E^{*,*}\mathfrak{G}^\circ$ *станет гомотопически инвариантным функтором со слабыми трансферами для класса* C_{proj}.

Стратегия доказательства, следующая идеям Гротендика, заключается в том, чтобы проводить все построения отдельно для случая замкнутых вложений и морфизмов проекции. Этим построениям и проверке соответствующих свойств посвящены параграфы III.2.i и III.2.ii.

III.2.i. Отображение Гизина (Gysin) для замкнутых вложений. Пусть $\tau\colon X \hookrightarrow Y$ — замкнутое вложение коразмерности d гладких k-многообразий и пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Y/X}$ — соответствующее нормальное расслоение.

Пусть $B = B(Y, X)$ обозначает деформацию X к нормальному конусу в Y. (Подробнее см. приложение A) Аксиома II.1.4.4 гласит, что:

$$E^{*,*}_X(\mathcal{N}) \underset{\simeq}{\overset{i_0^*}{\longleftarrow}} E^{*,*}_{X\times\mathbb{A}^1}(B) \underset{\simeq}{\overset{i_1^*}{\longrightarrow}} E^{*,*}_X(Y). \tag{III.2.1}$$

Напомним, что $\mathrm{th}(\mathcal{N}) \in E^{2d,d}_X(\mathcal{N})$ обозначает класс Тома нормального расслоения (см. II.2.3).

Конструкция-определение III.2.2. Определим отображение Гизина $\tau_!$ как следующую цепочку отображений:

$$E^{*-2d,*-d}(X) \xrightarrow{\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})} E^{*,*}_X(\mathcal{N}) \xrightarrow{i_1^*\circ(i_0^*)^{-1}} E^{*,*}_X(Y) \xrightarrow{j^*} E^{*,*}(Y),$$

где $j\colon (Y, \emptyset) \hookrightarrow (Y, Y - X)$ и $\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})$ обозначает композицию канонического изоморфизма $(s^*)^{-1}\colon E^{*,*}(X) \xrightarrow{\simeq} E^{*,*}(\mathcal{N})$, индуцированного нулевым сечением расслоения $\mathcal{N}$ и умножения на класс Тома $\mathrm{th}(\mathcal{N})$.

Проверим нужные нам свойства введенного отображения Гизина.

Предложение III.2.3. (Свойство трансверсальной замены базы) *Для трансверсального квадрата:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook, "\tau'"] \arrow[d, "g"] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, hook, "\tau"] & Y \end{tikzcd}$$

квадрат

$$\begin{tikzcd}
E^{*,*}(X') \arrow[r, "\tau'_!"] & E^{*,*}(Y') \\
E^{*,*}(X) \arrow[u, "g^*"'] \arrow[r, "\tau_!"] & E^{*,*}(Y) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

коммутативен.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

(III.2.2)

$$\begin{tikzcd}
E^{*-2d,*-d}(X') \arrow[r, "\smile\mathrm{th}(\mathcal{N}')"] & E^{*,*}_{X'}(\mathcal{N}') & E^{*,*}_{X'\times\mathbb{A}^1}(B') \arrow[l, "{i'_0}^*"'] \arrow[r, "{j'}^*{i'_1}^*"] & E^{*,*}(Y') \\
E^{*-2d,*-d}(X) \arrow[u, "g^*"'] \arrow[r, "\smile\mathrm{th}(\mathcal{N})"] & E^{*,*}_{X}(\mathcal{N}) \arrow[u, "N(g)^*"'] & E^{*,*}_{X\times\mathbb{A}^1}(B) \arrow[u, "B(f)^*"'] \arrow[l, "{i_0}^*"'] \arrow[r, "j^*i_1^*"] & E^{*,*}(Y).
\end{tikzcd}$$

Здесь все квадраты, кроме самого левого, очевидно, коммутативны (так как индуцированы коммутативными диаграммами схем). Следовательно, чтобы получить соотношение $\tau'_!g^* = f^*\tau_!$, нам достаточно проверить соотношение $g^*(\mathrm{th}(\mathcal{N})) = \mathrm{th}(g^*(\mathcal{N})) = \mathrm{th}(\mathcal{N}')$, которое, в свою очередь, выполнено благодаря предложению II.2.4, поскольку исходный квадрат трансверсален. □

Предложение III.2.4. (Финитная Аддитивность) *В коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
Z_0 \arrow[dr, "j_0"] \arrow[ddr, bend right, "\tau_0"'] & & Z_1 \arrow[dl, "j_1"'] \arrow[ddl, bend left, "\tau_1"] \\
& Z = Z_0\coprod Z_1 \arrow[d, hook, "\tau"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

с каноническими отображениями j_0, j_1 *и замкнутым вложением* τ*, имеем:*

$$\tau_! = \tau_{0,!} j_0^* + \tau_{1,!} j_1^*.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативные диаграммы естественных вложений (для $m = 0, 1$):

$$\begin{tikzcd}(Z_m, \emptyset) \arrow[r, hook, "j_m"] \arrow[rr, hook, bend right, "\psi_m"'] & (Z, \emptyset) \arrow[r, hook, "\varphi_m"] & (Z, Z_{1-m})\end{tikzcd} . \tag{III.2.3}$$

Применяя функтор $E^{*,*}$ к обеим диаграммам (для $m = 0, 1$) и складывая результаты, мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}E^{*,*}(Z) \arrow[r, "(j_0^*, j_1^*)", "\simeq"'] & E^{*,*}(Z_0) \oplus E^{*,*}(Z_1) \\ E^{*,*}_{Z_0}(Z) \oplus E^{*,*}_{Z_1}(Z). \arrow[u, "\varphi_0^* + \varphi_1^*"] \arrow[ur, "\simeq", "\psi_0^* \oplus \psi_1^*"'] & \end{tikzcd} \tag{III.2.4}$$

В этой диаграмме горизонтальная стрелка является изоморфизмом в силу аддитивности функтора $E^{*,*}$ (см. II.1.14). Диагональная стрелка — изоморфизм по свойству вырезания II.1.4.2. Таким образом, соответствующее вертикальной стрелке отображение $\varphi_0^* + \varphi_1^*$ также изоморфизм. Легко видеть, что сумма: $\varphi_0^*(\psi_0^*)^{-1} j_0^* + \varphi_1^*(\psi_1^*)^{-1} j_1^*$ задает тождественное отображение на $E^{*,*}(Z)$. Перепишем теперь доказываемое утверждение в следующей форме: $\tau_{0,!} j_0^* + \tau_{1,!} j_1^* = \tau_! = \tau_! \left(\varphi_0^*(\psi_0^*)^{-1} j_0^* + \varphi_1^*(\psi_1^*)^{-1} j_1^*\right)$. Таким образом, для доказательства предложения нам достаточно проверить, что $\tau_{m,!} = \tau_! \varphi_m^*(\psi_m^*)^{-1}$ для $m = 0, 1$. Чтобы проверить это соотношение для $m = 1$ (случай $m = 0$ получается заменой обозначений), рассмотрим диаграмму, составленную из последовательностей вида A.4:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{N}, \mathcal{N} - Z) \arrow[r] \arrow[d] & (B, B - Z \times \mathbb{A}^1) \arrow[d] & (X, X - Z) \arrow[l] \arrow[d] \\
(\mathcal{N}, \mathcal{N} - Z_1) \arrow[r] & (B, B - Z_1 \times \mathbb{A}^1) \arrow[d, "\sigma"] & (X, X - Z_1) \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_1 - Z_1) \arrow[r] \arrow[u] & (B_1, B_1 - Z_1 \times \mathbb{A}^1) & (X, X - Z_1). \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{III.2.5}$$

Верхняя (нижняя) строка в этой диаграмме отвечает морфизму $Z \overset{\tau}{\hookrightarrow} X$ ($Z_1 \overset{\tau_1}{\hookrightarrow} X$, соответственно). Мы также полагаем: $B = B(X, Z)$, $B_1 = B(X, Z_1)$, и $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}|Z_1$. Морфизм σ — моноидальное преобразование, соответствующее компоненте Z_0.

Так как $\sigma^{-1}(Z_1 \times \mathbb{A}^1) = Z_1 \times \mathbb{A}^1$, морфизм σ дает нам корректно определенный морфизм пар: $(B, B - Z_1 \times \mathbb{A}^1) \xrightarrow{\sigma} (B_1, B_1 - Z_1 \times \mathbb{A}^1)$.

Применяя функтор $E^{*,*}$ к диаграмме III.2.5 и комбинируя результат с определением отображения Гизина, мы получаем следующую диаграмму (здесь и далее мы, для краткости, опускаем некоторые индексы):

(III.2.6)

$$\begin{tikzcd}
E(Z) \arrow[r, "\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})"'] \arrow[rrrr, bend left, "\tau_!"] & E_Z(\mathcal{N}) & E_{Z\times\mathbb{A}^1}(B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & E_Z(X) \arrow[r] & E(X) \\
E_{Z_1}(Z) \arrow[u, "\varphi_1^*"] \arrow[r, "\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})"] \arrow[d, "\psi_1^*"', "\simeq"] & E_{Z_1}(\mathcal{N}) \arrow[u] \arrow[d, "N(\psi_1)^*"', "\simeq"] & E_{Z_1\times\mathbb{A}^1}(B) \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r] & E_{Z_1}(X) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d, equal] & E(X) \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
E(Z_1) \arrow[r, "\smile \mathrm{th}(\mathcal{N}_1)"] \arrow[rrrr, bend right, "\tau_{1,!}"'] & E_{Z_1}(\mathcal{N}_1) & E_{Z_1\times\mathbb{A}^1}(B_1) \arrow[u, "\sigma^*"'] \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & E_{Z_1}(X) \arrow[r] & E(X).
\end{tikzcd}$$

Как легко видеть, полученная диаграмма коммутативна, а ее внешний квадрат представляет искомое соотношение. ☐

III.2.ii. Построение трансфера для проективных морфизмов. В этом параграфе мы закончим построение семейства трансферов для ориентированных теорий. Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм коразмерности d, снабженный разложением:

(III.2.7)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[r, "p^Y"] & Y,
\end{tikzcd}$$

где τ обозначает замкнутое вложение, а p^Y — соответствующую проекцию.

Определение III.2.5. Определим отображение $p^Y_!\colon E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n) \to E^{*-2n,*-n}(Y)$ следующим образом. По ТПР имеем разложение группы $E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n)$ в прямую сумму:

(III.2.8)
$$E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=0}^{n} E^{*-2i,*-i}(Y) \times \xi^i,$$

где $\xi = c_1(\mathcal{O}(-1))$. Определим $p_!^Y$ как проекцию на слагаемое $E^{*-2n,*-n}(Y)$.

Предложение III.2.6. *Отображение* $p_!^Y$ *обладает следующими свойствами:*
a) коммутирование с заменой базы для произвольного морфизма;
b) $p_!^Y(\xi^n) = 1$.

Доказательство. Оба свойства немедленно следуют из определения. □

Определение III.2.7. Для всякой диаграммы вида III.2.7 определим отображение трансфера $f_!^\tau : E^{*,*}(X) \to E^{*+2d,*+d}(Y)$ полагая $f_!^\tau = p_!^Y \tau_!$, где $d = \dim Y - \dim X$.

Чтобы закончить доказательство теоремы III.2.1, нам нужно лишь проверить, что построенное отображение обладает свойствами III.1.4–III.1.6. Мы проделываем эти проверки в предложениях III.2.8–III.2.10.

Предложение III.2.8. *(Ср. III.1.4). Пусть*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

— трансверсальный декартов квадрат. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} E^{*,*}(X') \arrow[r, "f'_!"] & E^{*,*}(Y') \\ E^{*,*}(X) \arrow[r, "f_!"] \arrow[u, "g'^*"] & E^{*,*}(Y) \arrow[u, "g^*"] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму:

(III.2.9)
$$\begin{tikzcd}
 & Y' \times \mathbb{P}^n \arrow[r, "G"] \arrow[ddl, "p^{Y'}"] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[ddl, "p^Y"] \\
X' \arrow[ur, hook, "\tau'"] \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[ur, hook, "\tau"'] \arrow[d, "f"] & \\
Y' \arrow[r, "g"] & Y, &
\end{tikzcd}$$

где $G = g \times \mathrm{id}$. Поскольку квадрат, составленный из морфизмов замкнутых вложений, трансверсален, предложение III.2.3 влечет: $G^*\tau_! = \tau'_! g'^*$. С другой стороны, из предложения III.2.6, имеем: $g^* p^Y_! = p^{Y'}_! G^*$. Таким образом, получаем: $g^* f_! = g^* p^Y_! \tau_! = p^{Y'}_! G^* \tau_! = p^{Y'}_! \tau'_! g'^* = (f')_! g'^*$. Свойство замены базы доказано. □

Предложение III.2.9. *(Ср. III.1.5) Пусть* $X = X_0 \sqcup X_1$, $j_m \colon X_m \hookrightarrow X$ $(m = 0, 1)$ *— отображения вложения, и* $f \colon X \to Y$. *Полагая* $f j_m = f_m$, *имеем:*

(III.2.10)
$$f_{0,!} j_0^* + f_{1,!} j_1^* = f_*.$$

Доказательство. Свойство аддитивности для вложений III.2.4 дает нам соотношение: $\tau_! = \tau_{0,!} j_0^* + \tau_{1,!} j_1^*$. Отсюда получаем равенство: $f_! = p^Y_! \tau_! = p^Y_! (\tau_{0,!} j_0^* + \tau_{1,!} j_1^*) = f_{0,!} j_0^* + f_{1,!} j_1^*$, доказывающее свойство аддитивности для всех проективных морфизмов. □

Последним шагом является проверка свойства нормализации.

Предложение III.2.10. *(Ср. с III.1.6) Пусть* $\mathrm{pt} = \operatorname{Spec} k$ *и* $f \colon \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$ *— тождественный морфизм. Тогда для всякого разложения* $\mathrm{pt} \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n \overset{p}{\to} \mathrm{pt}$ *отображение* $f^\tau_! \colon E^{*,*}(\mathrm{pt}) \to E^{*,*}(\mathrm{pt})$ *тождественно.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предполагать, что: $\tau(\mathrm{pt}) = [0\colon 0\colon \cdots : 1]$. Легко видеть, что доказываемое соотношение следует из равенства $\tau_!(1) = \xi^n$. Именно, $f_!(1) = p_!\tau_!(1) = p_!(\xi^n) = 1$. Поскольку оба отображения $\tau_!$ и $p_!$ суть $E^{*,*}(\operatorname{Spec} k)$-линейны, свойство нормализации доказано. $\square$

Нам осталось лишь проверить следующее соотношение.

Лемма III.2.11. *$\tau_!(1) = \xi^n$, где $\xi = c_1(\mathcal{O}(-1)) \in E^{2,1}(\mathbb{P}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ обозначает нормальное расслоение отвечающее вложению $\mathrm{pt} \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$. Мы имеем: $\mathcal{N} = \mathbf{1}^n$ и $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathcal{N} \oplus \mathbf{1})$. Рассмотрим (очевидно) трансверсальный квадрат:

(III.2.11)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pt} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathbb{A}^n \arrow[d, hook, "j"] \\
\mathrm{pt} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^n.
\end{tikzcd}$$

Здесь j — открытое вложение $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{P}^n$, заданное формулой: $j(x_1, \ldots, x_n) = (x_1\colon \cdots : x_n\colon 1)$. Соответствующая диаграмма замены базы для отображения Гизина выглядит следующим образом:

(III.2.12)

$$\begin{tikzcd}
E(\operatorname{Spec} k) \arrow[r, "\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})"] \arrow[d, equal] & E_{\{0\}}(\mathcal{N}) \arrow[d, equal] & E_{\{0\}\times\mathbb{A}^1}(B(\mathbb{P}^n, \{0\})) \arrow[l, "\bar{i}_0^*"'] \arrow[r, "\bar{i}_1^*"] \arrow[d] & E_{\{0\}}(\mathbb{P}^n) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "j^*"] & E(\mathbb{P}^n) \\
E(\operatorname{Spec} k) \arrow[r, "\smile \mathrm{th}(\mathcal{N})"] & E_{\{0\}}(\mathcal{N}) & E_{\{0\}\times\mathbb{A}^1}(B(\mathbb{A}^n, \{0\})) \arrow[l, "i_0^*"'] \arrow[r, "i_1^*"] & E_{\{0\}}(\mathbb{A}^n).
\end{tikzcd}$$

Отображение j^* в этой диаграмме является изоморфизмом по аксиоме вырезания. Поскольку классы Черна с положительными номерами от тривиальных векторных расслоений нулевые, мы имеем равенство $c_t(\mathcal{N}) = t^n$.

Из определения класса Тома можно видеть, что $j^*(c_\xi(\mathcal{N})) = \mathrm{th}(\mathcal{N})$. Таким образом, чтобы проверить желаемое равенство, нам достаточно показать, что $i_1^*(i_0^*)^{-1} = \mathrm{id}$. □

Лемма III.2.12. *Рассмотрим диаграмму*

$$E^{*,*}_{\{0\}}(\mathbb{A}^n) \xleftarrow{i_0^*} E^{*,*}_{\{0\}\times\mathbb{A}^1}(B(\mathbb{A}^n,\{0\})) \xrightarrow{i_1^*} E^{*,*}_{\{0\}}(\mathbb{A}^n),$$

в которой отображения i_0^*, i_1^* суть изоморфизмы (См. II.1.4.4), индуцированные слоями над точками $\{0\}$ and $\{1\}$. Тогда $i_1^*(i_0^*)^{-1} = \mathrm{id}$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что $B = B(\mathbb{A}^n,\{0\})$ — тотальное пространство тавтологического линейного расслоения на $\mathbb{P}^n$. Рассмотрим следующий декартов квадрат:

(III.2.13)
$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "J"] \arrow[d, "q"] & B \arrow[d, "\bar{q}"] \\
\mathbb{A}^n \arrow[r, hook, "j"] & \mathbb{P}^n.
\end{tikzcd}$$

В этом квадрате $L = B \times_{\mathbb{P}^n} \mathbb{A}^n$ — ограничение векторного расслоения B на открытое подмногообразие базы. Несложно видеть, что отображение $i_0 \colon \mathcal{N} = \mathbb{A}^n \to B$ может быть разложено как $i_0 = Jj_0$, где j_0 — нулевое сечение расслоения L над $\mathbb{A}^n$ (расщепляющее морфизм q).

Таким же образом вложение i_1 возникает из сечения $j_1 \colon \mathbb{A}^n \to L$, заданного как $x \mapsto (x, 1) \times x \in L$. Имеем: $i_1 = Jj_1$.

Отображение проекции $q \colon L \to \mathbb{A}^n$ индуцирует морфизм пар $(L, L - (q^{-1}(0) \times \mathbb{A}^1)) \to (\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n - \{0\})$, который мы также обозначим через q. Поскольку L — векторное расслоение над $\mathbb{A}^n$, отображение q^* — изоморфизм (обратный к j_0^*). Таким образом, имеем:

$j_1^*(j_0^*)^{-1} = j_1^*q^* = (qj_1)^* = \mathrm{id}$. Соотношение $i_1^*(i_0^*)^{-1} = \mathrm{id}$ выполнено, так как $i_k^* = j_k^* J^*$ $(k = 0, 1)$. $\square$

Данное рассуждение заканчивает доказательство теоремы III.2.1 для ориентируемых теорий когомологий.

III.2.iii. «Правильное» определение трансфера для отображения проекции. Конструкция трансфера для отображения проекции, изложенная в предыдущем параграфе, имеет один существенный недостаток. Пользуясь этим, «наивным» определением для задания трансферов на всем классе C_{proj}, мы, вообще говоря, не получаем функтор. В общем случае, мы имеем $(fg)_! \neq f_! g_!$. Этот недостаток, как было видно из предыдущего параграфа, не помешает нам при доказательстве теоремы жесткости, поскольку при проверке свойств функтора со слабыми трансферами нам нигде не приходилось использовать композицию морфизмов. Однако ниже, например в доказательстве теоремы двойственности Пуанкаре в главе IV, функториальность будет нам необходима. Мы ограничиваемся в этом параграфе ориентируемыми теориями, представимыми T-спектрами. Два способа определения трансфера для морфизма проекции с нужными нам свойствами приведены в работе [**61**]. Там же доказывается и функториальность полученной структуры. Для полноты изложения мы приведем здесь одну из конструкций, но опустим проверку функториальности, выполненную в [**61**]. Итак, нам надо определить отображение:

$$p_!^Y \colon E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n) \to E^{*-2n,*-n}(Y). \tag{III.2.14}$$

Группы, стоящие по обе стороны от стрелки, являются, очевидно, левыми $E^{*,*}(Y)$-модулями и искомый трансфер будет строиться как гомоморфизм модулей. В то же время, справа на $E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n)$ естественно действует кольцо $E^{*,*} = E^{*,*}(\mathrm{pt})$. Таким образом, нам достаточно определить отображение на образующих ξ^i (где $i = 0, \ldots, n$) $E^{*,*}(Y)$-модуля $E^{*,*}(Y \times \mathbb{P}^n)$. Положим $p_!^Y(\xi^i) = \omega_{n-i}$, где $\omega_i \in E^{2i,i}(\mathrm{pt})$. Предположим теперь, что мы зафиксировали ориентацию γ спектра $\mathcal{E}$, представляющего нашу теорию. Тогда однозначно определен формальный групповой закон $F_\gamma(x, y)$, отвечающий ориентированному спектру. Существует и единственен гомоморфизм l_γ кольца Лазара (Lazard ring) в кольцо коэффициентов нашей теории, переводящий универсальный формальный групповой закон в закон $F_\gamma(x, y)$. Рассмотрим кольцо коэффициентов $MU^*(\mathrm{pt})$ теории комплексных кобордизмов. Как показано Квилленом [**67**] (см. также [**11**]), это кольцо естественно изоморфно кольцу Лазара и содержит элементы, соответствующие классам бордантности комплексных проективных пространств $[\mathbb{CP}^i]$. Положим $\omega_i := l_\gamma([\mathbb{CP}^i])$. Заметим, что приведенная нами в определении III.2.5 конструкция соответствует случаю $\omega_0 = 1$, $\omega_{>0} = 0$ и, тем самым, выдает функториальные трансферы для теорий когомологий, имеющих аддитивную формальную группу (например, этальные и мотивные когомологии).

III.3. Неориентируемый случай

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема III.3.1. *Всякая когомологическая псевдо-теория E (См. II.1.4), заданная на категории* $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$ *пар многообразий над алгебраически замкнутым полем k, может быть оснащена* *трансферами для класса морфизмов* C_{triv}, *после чего она становится функтором со слабыми трансферами для этого класса.*

В параграфе III.3.i мы построим для каждого морфизма $f\colon X \to Y \in C_{\mathrm{triv}}$ соответствующее отображение трансфера $f_!\colon E(X) \to E(Y)$. Свойства III.1.4–III.1.6 будут проверены в параграфе III.3.ii, что и доказывает теорему III.3.1.

III.3.i. Трансферы Беккера–Готтлиба (Becker–Gottlieb). Прежде всего, построим трансферы с носителем для замкнутых вложений. Пусть $W \hookrightarrow X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$ — замкнутые вложения такие, что $W, X, Y \in \mathbf{Sm/k}$ и $(f, \Theta) \in C_{\mathrm{triv}}$ коразмерности n. Определим отображение $(f,\Theta)^W_!\colon E_W(X) \to E^{[n]}_W(Y)$. Рассмотрим, во-первых, следующие изоморфизмы:

$$\text{(III.3.1)} \qquad \varphi_W(\Theta)\colon E_W(X) \xrightarrow[\cong]{\Sigma^n} E^{[n]}_{W\times\{0\}}(X \times \mathbb{A}^n) \xrightarrow[\cong]{\Theta^*} E^{[n]}_W(\mathcal{N}_{Y/X}).$$

На следующем шаге мы пользуемся свойством гомотопической чистоты. Рассмотрим отображение:

$$\text{(III.3.2)} \qquad \chi_W\colon E_W(\mathcal{N}_{Y/X}) \xrightarrow[\cong]{(i_0^*)^{-1}} E_{W\times\mathbb{A}^1}(B(Y,X)) \xrightarrow[\cong]{i_1^*} E_W(Y).$$

Определение III.3.2. Композицию построенных отображений:

$$\text{(III.3.3)} \qquad (f,\Theta)^W_! = \chi_W \varphi_W(\Theta)\colon E_W(X) \to E^{[n]}_W(Y)$$

мы будем называть трансфером Беккера–Готтлиба[2] для замкнутого вложения f с носителем W.

---

[2] Мы называем конструируемые здесь и далее отображения трансферами Беккера-Готтлиба, поскольку идея их построения следует философии статьи [**14**]. Однако, несомненно, полученная нами в итоге алгебраическая конструкция является намного более ограниченной, чем исходная топологическая.

В случае $W = X$ мы будем часто опускать упоминание о носителе. Как легко видеть, заданный таким образом трансфер коммутирует с отображением расширения носителей. Именно, выполнена следующая лемма.

Лемма III.3.3. *Предположим, мы имеем следующую цепь замкнутых вложений:* $W_2 \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$*, где* $f \in C_{\mathrm{triv}}$*. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
E_{W_2}(X) \arrow[r, "f_!^{W_2}"] \arrow[d, "ext."'] & E_{W_2}(Y) \arrow[d, "ext."] \\
E_{W_1}(X) \arrow[r, "f_!^{W_1}"] & E_{W_1}(Y)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. (Здесь $ext.$ *обозначает отображение расширения носителей.)*

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Конструкция-определение III.3.4. Пусть теперь $(f\colon X \to Y, \Theta) \in C_{\mathrm{triv}}$ — морфизм относительной размерности d, снабженный разложением $X \overset{\tau}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{p} Y$ с замкнутым вложением τ и проекцией p. Мы определяем трансфер Беккера-Готтлиба $(f, \tau, \Theta)_!$ следующим образом. Рассмотрим стандартное открытое вложение $\mathbb{A}^n \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ и обозначим дополнение к $\mathbb{A}^n$ через $\mathbb{P}_\infty$. Следующие морфизмы пар индуцированы стандартными вложениями:

(III.3.4)

$$(Y \times \mathbb{A}^n)_X \overset{j_X}{\hookrightarrow} (Y \times \mathbb{P}^n)_X \xleftarrow{\alpha} (Y \times \mathbb{P}^n, Y \times \mathbb{P}_\infty) \xrightarrow{\beta} (Y \times \mathbb{P}^n)_{Y \times \{0\}} \overset{j_Y}{\hookleftarrow} (Y \times \mathbb{A}^n)_{Y \times \{0\}}.$$

Поскольку морфизм β отождествляет $\mathbb{P}_\infty$ с выделенным (бесконечно-удаленным) сечением линейного расслоения $\mathbb{P}^n - \{0\}$ на $\mathbb{P}^{n-1}$, он индуцирует изоморфизм на группах когомологий $\beta^*\colon E_Y(Y \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} E(Y \times \mathbb{P}^n, Y \times \mathbb{P}_\infty)$. Морфизм j_X индуцирует изоморфизм вырезания $j_X^*\colon E_X(Y \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\cong} E_X(Y \times \mathbb{A}^n)$.

Определим отображение $(f,\Theta)_!$ как следующую композицию:
(III.3.5)

$$E(X)\xrightarrow{(\tau,\Theta)_!}E_X^{[d+n]}(Y\times\mathbb{A}^n)\xrightarrow{j_Y^*(\beta^*)^{-1}\alpha^*(j_X^*)^{-1}}E^{[d+n]}_{Y\times\{0\}}(Y\times\mathbb{A}^n)\underset{\cong}{\xrightarrow{\Sigma^{-n}}}E^{[d]}(Y),$$

где Σ^{-n} обозначает изоморфизм, обратный к n-кратной T-надстройке. Обычно мы будем обозначать отображение $\Sigma^{-n}j_Y^*(\beta^*)^{-1}\alpha^*(j_X^*)^{-1}$ через $p_!$.

III.3.ii. Доказательство теоремы III.3.1. Приступим теперь к проверке свойств.

Предложение III.3.5 (Свойство трансверсальной замены базы). *Для всякой когомологическая псевдо-теории E над полем k, снабженной построенными выше трансферами Беккера–Готтлиба, выполнено условие III.1.4 для класса C_{triv}.*

Доказательство. Взглянем на диаграмму, возникающую на первом шаге вычисления $f_!$ (см. свойство III.1.4).

(III.3.6)

$$\begin{tikzcd}
E(X') \arrow[r, "\Sigma^{d+n}"] & E^{[d+n]}_{X'\times\{0\}}(X'\times\mathbb{A}^{d+n}) \arrow[r, "\Theta'^*"] & E^{[d+n]}_{X'}(\mathcal{N}_{Y'\times\mathbb{A}^n/X'}) \\
E(X) \arrow[u, "g'^*"] \arrow[r, "\Sigma^{d+n}"] & E^{[d+n]}_{X\times\{0\}}(X\times\mathbb{A}^{d+n}) \arrow[u, "\Sigma^n(g')^*"] \arrow[r, "\Theta^*"] & E^{[d+n]}_{X}(\mathcal{N}_{Y\times\mathbb{A}^n/X}) \arrow[u, "N(g')^*"]
\end{tikzcd}$$

Функториальность отображения надстройки обеспечивает коммутативность левого квадрата. Коммутативность правого следует из условия согласования тривиализаций III.1.2. Продвигаясь далее в вычислении $f_!$, мы можем видеть, что все остальные квадраты, коммутативность коих нам надлежит проверить, либо коммутативны уже в категории $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$, либо включают изоморфизмы надстройки (или обратные к ним), подобно рассмотренному выше. Тем самым, установлена коммутативность диаграммы замены базы. □

Предложение III.3.6 (Финитная Аддитивность). *Для всякой когомологическая псевдо-теории E над полем k и снабженной трансферами Беккера–Готтлиба выполнено условие III.1.5 для класса C_{triv}.*

Доказательство. Как следует из доказательства предложения III.2.4, чтобы установить аддитивность, достаточно проверить коммутативность следующей пентагональной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
E(X_0) \arrow[d, "\tau_{0,!}"'] & E_{X_0}(X) \arrow[l, "\psi^*"', "\cong"] \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[dl, dotted] & E(X) \arrow[d, "\tau_!"] \\
E^{[d+n]}_{X_0}(Y \times \mathbb{A}^n) \arrow[rr, "\chi^*"] \arrow[dr, "p_{0,!}"'] & & E^{[d+n]}_{X}(Y \times \mathbb{A}^n) \arrow[dl, "p_!"] \\
& E^{[d]}(Y), &
\end{tikzcd} \tag{III.3.7}$$

где ψ^* — гомоморфизм вырезания, φ^* и χ^* — отображения расширения носителей, а композиции $p_{0,!} \circ \tau_{0,!}$ ($p_! \circ \tau_!$, соотв.) определяют отображения трансфера $f_{0,!}$ ($f_!$, соответственно). Докажем, во-первых, коммутативность нижнего треугольника. Обе наклонных стрелки могут быть проведены через отображение $E(Y \times \mathbb{P}^n, Y \times$

$\mathbb{P}_\infty) \xrightarrow{\Sigma^{-n} j_Y^*(\beta^*)^{-1}} E^{[-n]}(Y)$. Поскольку диаграмма:

(III.3.8)
$$\begin{tikzcd}
(Y \times \mathbb{A}^n)_{X_0} \arrow[d, "j_{X_0}"'] & & (Y \times \mathbb{A}^n)_X \arrow[ll, hook, "\chi"'] \arrow[d, "j_X"] \\
(Y \times \mathbb{P}^n)_{X_0} & & (Y \times \mathbb{P}^n)_X \arrow[ll, hook] \\
& (Y \times \mathbb{P}^n, Y \times \mathbb{P}_\infty) \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна уже в категории $\overline{\mathbf{Sm}}^{\mathbf{2}}/\mathbf{k}$, рассматриваемый треугольник также коммутативен.

Покажем, теперь, коммутативность квадрата в верхней части диаграммы III.3.7. Для этого определим пунктирное отображение, как трансфер с носителем X_0, соответствующий отображению вложения $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^n = \mathcal{Y}$. Такое определение (по лемме III.3.3) делает правую (трапецеидальную) часть диаграммы коммутативной. Коммутативность верхнего левого треугольника эквивалентна, по определению, коммутативности следующей диаграммы:

(III.3.9)
$$\begin{tikzcd}
E_{X_0}(X) \arrow[r, "\Sigma^{d+n}"] \arrow[d, "\psi^*"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & E_{X_0}^{[d+n]}(X \times \mathbb{A}^{d+n}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & E_{X_0}^{[d+n]}(\mathcal{N}_{\mathcal{Y}/X}) \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & E_{X_0 \times \mathbb{A}^1}^{[d+n]}(B(\mathcal{Y}, X)) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & E_{X_0}^{[d+n]}(\mathcal{Y}) \arrow[d, equal] \\
E(X_0) \arrow[r, "\Sigma^{d+n}"] & E_{X_0}^{[d+n]}(X_0 \times \mathbb{A}^{d+n}) \arrow[r] & E_{X_0}^{[d+n]}(\mathcal{N}_{\mathcal{Y}/X_0}) & E_{X_0 \times \mathbb{A}^1}^{[d+n]}(B(\mathcal{Y}, X_0)) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[u, "\sigma^*"] & E_{X_0}^{[d+n]}(\mathcal{Y}).
\end{tikzcd}$$

(Здесь отображение σ^* индуцировано, как и в диаграмме III.2.5, морфизмом моноидального преобразования, соответствующем компоненте X_1. Подробнее, см. доказательство предложения III.2.4.)

Для проверки коммутативности этой диаграммы могут быть использованы наблюдения, приведенные в доказательстве предложения III.3.5. Функториальность отображения надстройки влечет коммутативность квадрата (1). Квадрат (2) коммутативен, поскольку его нижняя горизонтальная стрелка является ограничением верхней. Наконец, квадраты (3) и (4) индуцированы коммутативными квадратами в категории пар многообразий. Предложение доказано. ☐

Нам осталось проверить условие III.1.6.

Предложение III.3.7 (Нормализация). *Для функтора E, удовлетворяющего вышеприведенным условиям над алгебраически замкнутым полем k, и морфизма* $\mathrm{id}\colon \mathrm{pt} \to \mathrm{pt} = \mathrm{Spec}(k)$*, снабженного произвольным разложением* $\mathrm{pt} \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n \to \mathrm{pt}$*, отображение* $\mathrm{id}_!\colon E(\mathrm{pt}) \to E(\mathrm{pt})$ *тождественно.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку отображений, определяющую трансфер $\mathrm{id}_!\colon E(\mathrm{pt}) \to E(\mathrm{pt})$:

(III.3.10)

$$\begin{tikzcd}
E(\mathrm{pt}) \arrow[d, "\Sigma^n"] & & & & \\
E_{\{0\}}(\mathbb{A}^n) \arrow[r, "(i_0^*)^{-1}"] \arrow[rr, dotted, bend right, "\delta"'] & E_{\mathbb{A}^1}(B(\mathbb{A}^n, \mathrm{pt})) \arrow[r, "i_1^*"] & E_{\{0\}}(\mathbb{A}^n) \arrow[r, "(j^*)^{-1}"] \arrow[dr, dotted, "\gamma"] & E_{\{0\}}(\mathbb{P}^n) \arrow[r, "\alpha^*"] & E(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}_\infty) \arrow[d, "(\beta^*)^{-1}"'] \\
& & & E_{\{0\}}(\mathbb{A}^n) \arrow[d, "\Sigma^{-n}"] & E_{\{0\}}(\mathbb{P}^n) \arrow[l, "j^*"'] \\
& & & E(\mathrm{pt}). &
\end{tikzcd}$$

(Здесь мы, для краткости, опустили упоминание сдвигов.) Мы принимаем во внимание, что нормальное расслоение к точке pt в

$\mathbb{A}^n$ канонически изоморфно $\mathbb{A}^n$. Заметим также, что в рассматриваемом случае, в силу леммы II.4.1, конструируемое отображение трансфера не зависит от выбора тривиализации нормального расслоения.

В этой диаграмме j^* обозначает изоморфизм вырезания, а отображения γ и δ заданы композициями соответствующих сплошных стрелок. Как следует из леммы III.2.12, отображение δ тождественно. Поскольку в рассматриваемом случае оба отображения α^* и β^* индуцируются одним и тем же вложением $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}_\infty) \hookrightarrow (\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n - \{0\})$, отображение γ также тождественно. Это заканчивает доказательство условия нормализации. $\square$

Три утверждения, доказанные выше, проверяют все условия, сформулированные в определении функтора со слабыми трансферами. Тем самым, мы доказали теорему III.3.1.

III.4. Теоремы жесткости

Предположим, до конца этого параграфа, что базисное поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^\circ \to \mathbf{Ab}$ — контравариантный функтор и X — гладкая аффинная кривая над k. Мы можем построить отображение $\Phi\colon \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(k))$, заданное на канонических образующих (k-точках кривой X) формулой: $[x] \mapsto x^*$, где $x^*\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(k)$ — отображение обратного образа, соответствующее точке $x \in X(k)$.

Класс $\mathfrak{C}$ будет обозначать один из классов морфизмов: C_{triv} или C_{pfin}.

Замечание III.4.1. Поскольку нижеследующее доказательство предполагает возможность того, что $\mathfrak{C} = C_{\mathrm{triv}}$, мы вновь вынуждены проявлять заботу о тривиализациях нормальных расслоений. Если интересоваться только случаем $\mathfrak{C} = C_{\mathrm{pfin}}$, рассуждения существенно упрощаются, см. [**64**].

Теорема III.4.2. *Пусть X — гладкая кривая над алгебраически замкнутым полем k, имеющая тривиальное касательное расслоение, а $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный функтор со слабыми трансферами для класса $\mathfrak{C}$. Тогда, в вышеприведенных обозначениях, существует отображение Ψ, делающее следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Div}(X) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Omega"'] & & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(k)) \\
& \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty). \arrow[ur, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь отображение Ω — канонический гомоморфизм, $\bar{X}$ —проективное замыкание X, а $X_\infty = \bar{X} - X$.

Доказательство. Так как поле k алгебраически замкнуто[3], группа $\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)$ порождена неразветвленными дивизорами на кривой X (т.е. дивизорами вида $\sum_i \pm[x_i]$, где x_i суть попарно различные точки X). Все возможные соотношения между неразветвленными дивизорами относятся к следующему типу: $D \sim D'$ если, и только если, существует рациональная функция f на X, регулярная в окрестности X_∞ и такая, что $f|_{X_\infty} = 1$, $\mathrm{div}_0(f) = D$ и $\mathrm{div}_\infty(f) = D'$. Для элемента D в относительной группе Пикара,

---

[3] Аналогичное, существенно менее тривиальное утверждение, выполнено и над любым бесконечным полем (см. лемма III.5.20).

положим: $\Psi(D) = \Phi(\Omega)^{-1}(D)$. Чтобы убедиться, что отображение Ψ корректно определено, нам нужно проверить, что $\Phi(D) = \Phi(D')$ для эквивалентных дивизоров $D \sim D'$. Очевидно, можно предположить, что $\mathrm{Supp}(D) \frown \mathrm{Supp}(D') = \emptyset$. Возьмем функцию $f \in k(X)$ такую, что $f|_{X_\infty} = 1$, $\mathrm{div}_0(f) = D$ и $\mathrm{div}_\infty(f) = D'$.

Обозначим через X^0 открытое подмножество $\bar{X}$ на котором $f \neq 1$. Функция f выбрана таким образом, что: $X^0 \subset X$ и морфизм $f\colon X^0 \to \mathbb{P}^1 - \{1\} = \mathbb{A}^1$ — конечный.

Если $\mathfrak{C} = C_{\mathrm{triv}}$, нам нужно дополнительно показать, что $f \in C_{\mathrm{triv}}$. Выбор функции f гарантирует, что существует разложение $f\colon X^0 \xrightarrow{\tau} \mathbb{A}^n \xrightarrow{p} \mathbb{A}^1$, где τ — замкнутое вложение и p — проекция. Из определения нормального расслоения $\mathcal{N}_{\mathbb{A}^n/X^0}$, имеем следующую точную последовательность:

$$\text{(III.4.1)} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_{X^0} \arrow[r] & \tau^*(T_{\mathbb{A}^n}) \arrow[r] & \mathcal{N}_{\mathbb{A}^n/X^0} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Поскольку касательные расслоения T_{X^0} и $T_{\mathbb{A}^n}$ тривиальны, нормальное расслоение $\mathcal{N}_{\mathbb{A}^n/X^0}$ стабильно тривиально. Наконец, так как каждое стабильно-тривиальное расслоение над гладкой аффинной кривой тривиально[4], имеем: $f \in C_{\mathrm{triv}}$. (Если же $\mathfrak{C} = C_{\mathrm{pfin}}$, данное утверждение тривиально.)

---

[4] Векторное расслоение $\mathcal{V}$ ранга n на гладкой аффинной кривой содержит тривиальное прямое слагаемое ранга $n-1$. Таким образом, $\mathcal{V} = \mathbf{1}^{n-1} \oplus \mathcal{L}$. Пусть теперь q — такое натуральное число, что векторное расслоение $\mathcal{V} \oplus \mathbf{1}^q$ — тривиально. Поскольку $\det(\mathcal{V} \oplus \mathbf{1}^q) = \mathcal{L}$, расслоение $\mathcal{V}$ стабильно тривиально тогда и только тогда, когда $\mathcal{L} = \mathbf{1}$.

Поскольку соответствующие дивизоры неразветвлены, отображение f этально над точками $\{0\}$ и $\{\infty\}$. Рассмотрим диаграмму

(III.4.2)
$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "i^*"] & & \\
\bigoplus\limits_{x/\infty}\mathcal{F}(x) \arrow[rd, "\sum\limits_{x/\infty} f_{x,!}"'] & \mathcal{F}(D') \arrow[l] \arrow[d, "f_{\infty,!}"] & \mathcal{F}(X^0) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "f_!"] & \mathcal{F}(D) \arrow[r] \arrow[d, "f_{0,!}"] & \bigoplus\limits_{x/0}\mathcal{F}(x) \arrow[ld, "\sum\limits_{x/0} f_{x,!}"] \\
& \mathcal{F}(k) & \mathcal{F}(\mathbb{A}^1) \arrow[l, "i^*_\infty"'] \arrow[r, "i^*_0"] & \mathcal{F}(k). &
\end{tikzcd}$$

Здесь $f_{0,!}$ ($f_{\infty,!}$) — отображение трансфера, соответствующее морфизму f_0 (соотв. f_∞), которое является ограничением морфизма f на дивизор D (D', соответственно). Отображения i^*_0, i^*_∞ индуцированы точками $\{0\}$ и $\{\infty\}$ проективной прямой $\mathbb{P}^1$.

Наконец, все суммы в самой правой (левой) части диаграммы вычисляются по конечным множествам точек прообраза нуля (бесконечности).

Пример A.4 и свойство III.1.4 функторов со слабым трансфером показывают, что два квадрата в диаграмме коммутативны. Свойство III.1.5 влечет коммутативность треугольников. Наконец, из свойства III.1.6 можно видеть, что для каждой точки x над $\{\infty\}$ или над $\{0\}$ выполнено соотношение $f_{x,!} = \mathrm{id}$.

Оба отображения i^*_∞ и i^*_0 суть изоморфизмы, обратные изоморфизму $p^*\colon \mathcal{F}(k) \to \mathcal{F}(\mathbb{A}^1)$ (по свойству гомотопической инвариантности). Таким образом, имеем:

(III.4.3)
$$\sum_{x/\infty} x^* = \sum_{x/0} x^* \colon \mathcal{F}(X^0) \to \mathcal{F}(k).$$

Что легко влечет:

$$\Phi(D') = \sum_{x/\infty} x^* = \sum_{x/0} x^* = \Phi(D)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(k). \tag{III.4.4}$$

□

Следствие III.4.3. *Предположим, в дополнение к условиям теоремы III.4.2, что существует натуральное число n взаимнопростое с экспоненциальной характеристикой $\mathrm{Char}(k)$ такое, что $n\mathcal{F}(Y) = 0$ для всякого $Y \in \mathbf{Sm/k}$. Тогда, отображение Ψ может быть проведено через отображение степени $\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty) \overset{\deg}{\to} \mathbb{Z}$. Формально это означает, что для любых двух дивизоров D, D' одинаковой степени, имеем: $\Phi(D) = \Phi(D')\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(k)$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)^\circ \longrightarrow \mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{III.4.5}$$

Так как группа дивизоров нулевой степени $\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)^\circ$ n-делима над алгебраически замкнутым полем характеристики взаимнопростой с n (см. например [**57**, стр.56]), мы получаем: $\Psi|_{\mathrm{Pic}(\bar{X}, X_\infty)^\circ} = 0$. Следствие доказано. □

Избавимся, теперь, от условия тривиальности касательного расслоения. Для этого нам понадобится следующее простое геометрическое наблюдение.

Лемма III.4.4. *Для гладкой кривой X и дивизора D на ней существует открытая окрестность X^0 носителя дивизора $\mathrm{Supp}\, D$ такая, что касательное расслоение T_{X^0} тривиально.*

Доказательство. Пусть $\Omega^{\vee}$ — обратимый пучок на X, соответствующий касательному расслоению T_X. Обозначим через $\mathcal{O}_{X,D}$ локализацию $\mathcal{O}_X$ в носителе дивизора D. Схема $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,D}$ — спектр регулярного полу-локального кольца, снабженный естественным морфизмом $j\colon \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,D} \to X$. Следовательно, пучок $j^*\Omega^{\vee}$ свободен. Это означает, что существует открытая окрестность $X^0 \supset \operatorname{Supp} D$ такая, что ограничение $\Omega^{\vee}|_{X^0}$ также свободно. □

Теорема III.4.5 (Теорема Жесткости). *Пусть* $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^{\circ} \to \mathbf{Ab}$ *— гомотопически инвариантный функтор со слабыми трансферами для класса* $\mathfrak{C}$. *Предположим также, что поле* k *алгебраически замкнуто и* $n\mathcal{F} = 0$ *для некоторого натурального* n *взаимно-простого с* $\operatorname{Char} k$. *Тогда, для любого гладкого неприводимого многообразия* V *и двух произвольных* k*-рациональных точек* $v_1, v_2 \in V(k)$ *индуцированные отображения* $v_1^*, v_2^*\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(k)$ *совпадают.*

Доказательство. Существует цепочка неприводимых гладких кривых, $X_i \subset V$ соединяющая точки v_1 и v_2 [**57**]. Теперь достаточно применить следствие III.4.3. □

Теорема III.4.6. *Пусть* $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^{\circ} \to \mathbf{Ab}$ *— гомотопически инвариантный функтор, для которого выполнена теорема жесткости. Тогда, для расширения алгебраически замкнутых полей* $k \subset K$ *естественное отображение* $\operatorname{Spec} K \xrightarrow{\pi} \operatorname{Spec} k$ *индуцирует изоморфизм* $\pi^*\colon \mathcal{F}(\operatorname{Spec} k) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(\operatorname{Spec} K)$.

Поскольку, как уже отмечалось выше (предложение II.6.1), по теории $\mathcal{F}$ и многообразию Y можно построить новую теорию

${}^{Y}\mathcal{F}(-) := \mathcal{F}(Y \times -)$, выполнено следующее простое, но полезное следствие.

Следствие III.4.7. *Пусть $\mathcal{F}\colon (\mathbf{Sm/k})^{\circ} \to \mathbf{Ab}$ – функтор, рассмотренный выше. Тогда, для расширения алгебраически замкнутых полей $k \subset K$ и всякого гладкого многообразия $X \in$ $\mathbf{Sm/k}$ естественное отображение замены базы $\pi^{*}\colon \mathcal{F}(X) \to$ $\mathcal{F}(X_K)$ есть изоморфизм.*

Замечание III.4.8. $\operatorname{Spec} K$ является про-объектом в категории $\mathbf{Sm/k}$. Более того, схемы в семействе, задающем $\operatorname{Spec} K$, могут быть выбраны аффинными [**25, 73**].

Доказательство. Доказательство данного утверждения следует стратегии, предложенной в [**25, 73**]. Выберем элемент $\alpha \in$ $\mathcal{F}(\operatorname{Spec} k)$ такой, что $\pi^{*}(\alpha) = 0$. Поскольку $\mathcal{F}(\operatorname{Spec} K) =$ $\varinjlim\limits_{\alpha}\mathcal{F}(U_\alpha)$, где U_α пробегает некое семейство гладких аффинных k-многообразий, мы можем найти такое гладкое аффинное многообразие $U \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} k$, что $\varphi^{*}(\alpha) = 0$. Так как поле k алгебраически замкнуто, существует k-точка $\operatorname{Spec} k \xrightarrow{x} U$. Поскольку композиция $\mathcal{F}(\operatorname{Spec} k) \xrightarrow{\varphi^{*}} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{x^{*}} \mathcal{F}(\operatorname{Spec} k)$ тождественна, имеем: $\alpha = 0$. Тем самым показано, что отображение π^{*} инъективно.

Докажем теперь сюръективность π^{*}. Пусть нам дан элемент $\beta \in \mathcal{F}(\operatorname{Spec} K)$. Выберем гладкое аффинное многообразие U вместе с морфизмом $\operatorname{Spec} K \xrightarrow{y} U$ так, что $\beta = y^{*}(\beta')$, где $\beta' \in \mathcal{F}(U)$. Как и ранее, U должно иметь k-точку $\operatorname{Spec} k \xrightarrow{x} U$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

(III.4.6)

$$\begin{tikzcd}
U_K \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[u, bend left=50, "\tilde{y}"] \arrow[u, bend right=50, "\tilde{x}"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, "y"] & \operatorname{Spec} k, \arrow[u, bend right=50, "x"']
\end{tikzcd}$$

где $U_K = \operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} k} U$. Две K-точки $x \circ \pi$ и y многообразия U определяют две K-точки $\tilde{x}, \tilde{y}$ в U_K. Имеем: $\beta - \pi^* x^*(\beta') = (y^* - \pi^* x^*)(\beta') = (\tilde{y}^* - \tilde{x}^*)\bar{\pi}^*(\beta') = 0$, поскольку $\tilde{y}^* - \tilde{x}^* = 0$, по теореме Жесткости. Таким образом, $\beta \in \operatorname{Im} \pi^*$. □

Замечание III.4.9. Несложно заметить, что доказательство теоремы III.4.6 содержит следующий недостаток. Теорема жесткости доказывается над полем k (там же, где выполняются все построения трансферов), а используются эти результаты над бóльшим полем K. Пользуясь условием непрерывности, можно поднять конструкцию трансферов на большее поле и проверить все условия совместимости. Однако, дабы избежать чрезмерного усложнения изложения, мы не следуем этим путем, а напротив, заметим, что все интересующие нас примеры представляют собой теории, *a priori* определенные над обоими полями, что сразу дает нам возможность использовать теорему жесткости над бóльшим полем.

Замечание III.4.10. Рассмотренный во введении к настоящей главе пример K-функтора показывает, что условие алгебраической замкнутости в теореме III.4.6 является существенным.

III.5. Жесткость для Гензелевых локальных колец

В предыдущем разделе мы рассматривали теоремы жесткости для многообразий над алгебраически-замкнутыми полями и их применение к задаче вычисления когомологий алгебраически-замкнутого поля. Следующим по сложности этапом должен быть переход к рассмотрению локальных колец. В данном разделе мы докажем, следуя работе [**34**], что для большого класса $\mathbb{A}^1$-представимых теорий, включающего, в частности, все ориентируемые теории, выполнены теоремы жесткости аналогичные доказанным Габбером, Жилле–Томассоном и Суслиным для K-теории.

Теорема жесткости и одно из ее следствий, приведенное в работе Габбера [**24**] выглядят следующим образом:

Теорема III.5.1. *Предположим, что* R *— Гензелево локальное кольцо и* $\ell \in \mathbb{N}$ *— обратимо в* R. *Пусть* $f\colon M \to \operatorname{Spec} R$ *— гладкий аффинный (равноразмерностный) морфизм относительной размерности 1. Пусть также* $s_0, s_1\colon \operatorname{Spec} R \to M$ *— два сечения* f *такие, что* $s_0(P) = s_1(P)$ *в замкнутой точке* P *спектра локального кольца* $\operatorname{Spec} R$. *Тогда, для всякого гомоморфизма* $R \to F$ *в некоторое поле* F *два отображения композиции* $K_*(M, \mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{s_i} K_*(R, \mathbb{Z}/\ell) \to K_*(F, \mathbb{Z}/\ell)$ *совпадают* $(i = 0, 1)$.

Для регулярного кольца R известно, что отображение $K_*(R, \mathbb{Z}/\ell) \to K_*(F, \mathbb{Z}/$ возникающее в формулировке теоремы, является мономорфизмом, по крайней мере, целочисленно, во многих важных случаях. В частности, если $F = \operatorname{Frac}(R)$ — поле частных кольца R, содержащего поле, условие мономорфности представляет из себя гипотезу Герстена (Gersten) для алгебраической K-теории, доказанную Квилленом (Quillen) [**68**] и Паниным [**62**] в этом случае. Мы рассматриваем частный случай гипотезы Герстена с конечными коэффициентами в предложении II.3.5.

Следствие III.5.2. *Пусть* M *— гладкая схема над полем* k*, а* ℓ *— некоторое натуральное число, обратимое в* k*. Пусть также* $P \in M(k)$ *—* k*-рациональная точка* M *и* $R = \mathcal{O}^h_{M,P}$ *— гензелизация соответствующего локального кольца. Тогда отображение*

$$K_*(R, \mathbb{Z}/\ell) \overset{\cong}{\to} K_*(k, \mathbb{Z}/\ell),$$

индуцированное гомоморфизмом вычета $R \longrightarrow k$ *— изоморфизм.*

Доказательство теоремы III.5.1 опирается на существование отображения трансфера, удовлетворяющего стандартным условиям и на гомотопическую инвариантность K-функтора. В то же время, следствие III.5.2 использует, сверх того, то обстоятельство, что K_* коммутирует с индуктивными пределами.

В этом разделе мы будем, как и ранее, всегда предполагать, что рассматриваемая теория когомологий E коммутирует с копределами по фильтрованной категории (что и происходит во всех интересных случаях) и соответствующим образом расширять область определения функтора E. В работе [**74**, стр. 227], Суслин отмечает, что приведенная выше теорема должна иметь место и для других гомотопически инвариантных функторов, снабженных трансферами, удовлетворяющими «стандартным условиям», заданными для конечных плоских морфизмов. Первая система аксиом, которым должны удовлетворять искомые трансферы, была опубликована в работе [**75**]. (Также нужно упомянуть и неопубликованный манускрипт Яннсена (Jannsen) 1995 года, недавно ставший доступным на веб-странице автора [**38**].) Другой набор аксиом используется в статье Панина и автора [**64**]. (См. также параграф II.1.ii настоящей диссертации) В работе [**95**], нами показано, что аналогичные результаты могут быть получены для всех теорий, представимых в стабильной $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории Воеводского [**85**]. Примеры таких теорий включают, в частности, эрмитову K-теорию, Бальмеровские группы Витта (в предположении, что $\mathrm{Char}(k) \neq 2$).

В данном разделе мы вводим некоторое дополнительное условие на функтор когомологий, которое может быть проверено во многих важных случаях (см. следствие III.5.5 ниже). В результате мы можем избавиться от требования алгебраической замкнутости основного поля, построить трансферы и доказать следующее обобщение теоремы III.5.1 и следствия III.5.2 Габбера:

Теорема III.5.3. *Пусть k — бесконечное поле и пусть R — гензелево локальное кольцо существенно гладкое над k с полем частных* $\mathrm{Frac}(R) = F$. *Предположим, что $E = E^{**}$ — контравариантный биградуированный функтор на категории* $\mathbf{Sm/k}$ *гладких схем конечного типа над k, представимый в стабильной $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории и удовлетворяющий условию $\ell E = 0$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$, обратимого в R. Предположим, более того, что E нормализован по отношению к полю F(см. определение III.2.10). Пусть $f\colon M \to \operatorname{Spec} R$ — гладкий аффинный морфизм (чистой) размерности d, $s_0, s_1\colon \operatorname{Spec} R \to M$ —*

два сечения морфизма f *такие, что* $s_0(P) = s_1(P)$ *в замкнутой точке* P *аффинного спектра* $\operatorname{Spec} R$*. Тогда два отображения* [5] $E(M) \xrightarrow{s_i^*} E(\operatorname{Spec} R)$ *совпадают* $(i = 0, 1)$.

Следствие III.5.4. *Пусть* E *и* k *— такие же, как и в теореме III.5.3,* V *— гладкое многообразие над* k*,* $P \in V(k)$ *—* k*-рациональная точка* V*, а* $R = \mathcal{O}^h_{V,P}$*. Тогда естественное отображение*

$$E(\operatorname{Spec} R) \xrightarrow{\cong} E(\operatorname{Spec} k)$$

— изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого следствия во многом напоминает доказательство теоремы III.4.6. Инъективность рассматриваемого отображения следует из существования естественного расщепляющего морфизма вложения замкнутой точки $\operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} R$. Чтобы доказать сюръективность, вспомним, что Гензелизация локального кольца многообразия в точке возникает как предел системы этальных окрестностей этой точки [**52**, I.4.111]. Таким образом, для всякого элемента $\alpha \in E(\operatorname{Spec} R)$ существует многообразие U этальное над V (можно также полагать эти многообразия аффинными), снабженное каноническими морфизмом $\operatorname{Spec} R \xrightarrow{y} U$ и k-точкой x такое, что $\alpha = y^*(\beta)$ для некоторого

---

[5] Напомним, что здесь и далее мы предполагаем, что область определения теории E расширяется на про-объекты. В частности, полагаем: $E(\operatorname{Spec} R) := \varinjlim E(X_i)$, поскольку $\operatorname{Spec} R = \varprojlim X_i$, где $X_i \in \mathbf{Sm/k}$.

элемента $\beta \in E(U)$. Рассмотрим следующий декартов квадрат:

(III.5.1)

$$\begin{tikzcd}
U \underset{\operatorname{Spec} k}{\times} \operatorname{Spec} R \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[u, bend left, "\tilde{y}"] \arrow[u, bend right, "\tilde{x}"'] \arrow[ur, "y"] \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{Spec} k. \arrow[u, bend right, "x"']
\end{tikzcd}$$

Сечения $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ индуцируются морфизмами x и y, соответственно. Поскольку, по предположению жесткости, они индуцируют одинаковое отображение в ко-гомологиях, получаем: $\alpha = \pi^* x^*(\beta)$. Тем самым, наше следствие доказано. ☐

Мы увидим, что доказательство теоремы III.5.3 для произвольной теории E значительно сложнее, чем в специальном случае K-теории.

Вышеприведенные гипотезы выполняются для всех ориентированных теорий так же, как и для построенных Бальмером (Balmer) обобщенных групп Витта W^* в некоторых специальных размерностях (см. III.5.iii). Например, имеем:

Следствие III.5.5. *Пусть* $X \in \mathbf{Sm/k}$, *где поле* k *такое же, как и выше,* V *— гладкое многообразие над* k, $P \in V(k)$, *и* $F = \operatorname{Frac}(\mathcal{O}^h_{V,P})$. *Пусть также (как и в теореме III.5.3)* E *является представимой теорией когомологий такой, что* $\ell E = 0$ *для некоторого натурального* $\ell \in \mathbb{Z}$, *обратимого в* F. *Если отображение* $E(\mathbb{P}^2_{X_L}) \to E(\mathbb{P}^1_{X_L})$, *индуцированное одним из стандартных вложений* $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ *— эпиморфизм для всякого конечного сепарабельного расширения полей* L/F, *то отображение*

$$E(X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \mathcal{O}^h_{V,P}) \to E(X)$$

— изоморфизм. Если теория E представима коммутативным кольцевым T-спектром, достаточно проверить условие эпиморфности для $X = \operatorname{Spec} k$.

Замечание III.5.6. Вышеприведенное условие эпиморфности выполняется, например, для таких функторов, как алгебраические кобордизмы (MGL), мотивные когомологии ($H_{\mathcal{M}}$), или K-теория.

III.5.i. Трансферы и условие нормализации. Рассмотрим введенный ранее класс C_{triv} оснащенных морфизмов (f, τ, Θ). Используя технику, развитую в разделе III.3.i, построим для этого класса отображения трансфера, отвечающие C_{triv}. Ранее, мы предполагали, что базовое поле алгебраически замкнуто. Однако, это условие нигде не используется в доказательствах свойств замены базы и финитной аддитивности. Более того, из наших предположений легко следует, что трансфер от тождественного отображения точки в себя является изоморфизмом.

Таким образом, мы можем переформулировать теорему о существовании трансферов Беккера-Готтлиба следующим образом:

Теорема III.5.7. *Пусть E — градуированный функтор на* $\mathbf{Sm/k}$*, представимый некоторым T-спектром в стабильной $\mathbb{A}^1$-гомотопической категории Воеводского $\mathbf{SH}(k)$. Тогда класс C_{triv} может быть снабжен отображениями трансфера, удовлетворяющими условиям финитной аддитивности и трансверсальной замены базы и такими, что для морфизма* $\mathrm{id} = (\mathrm{id}, -, \mathrm{id})\colon \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$ *отображение* $\mathrm{id}_!$ *является изоморфизмом.*

Чтобы доказать теорему жесткости, нам нужна более строгая форма условия нормализации, а именно, независимость отображения $\mathrm{id}_!$ от тривиализации нормального расслоения. Чтобы доказать это утверждение без предположения алгебраической замкнутости основного поля, нам понадобится следующее свойство функтора когомологий.

Определение III.5.8 (**Нормализация**). Мы говорим, что псевдо-теория $E\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbf{Ab}$ удовлетворяет условию *нормализации* для сепарабельного расширения полей K/k, если для всякого $\lambda \in K^*$ автоморфизм $\Sigma_T^{-1}\lambda^*\Sigma_T\colon E(K) \to E(K)$, индуцированный λ-гомотетией $\mathbb{A}^1_K$ является тождественным. Мы называем функтор E *нормализованным* по отношению к некоторому полю k, если он удовлетворяет условию нормализации для всякого конечного сепарабельного расширения этого поля.

Как показано в предложении III.3.7, для нормализованных теорий верно следующее.

Предложение III.5.9. *Для всякого разложения* $\operatorname{Spec} K \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n_K \to \operatorname{Spec} K$ *морфизма* (id, Θ) *результирующее отображение трансфера* $(\mathrm{id}, \tau, \Theta)_!\colon E(K) \to E(K)$ *тождественно.*

Замечание III.5.10. Из доказательства III.3.7 легко видеть, что предложение III.5.9 выполнено для градуированной теории E в некоторой размерности i если, и только если, условие нормализации в определении III.5.8 выполнено для E^i. С данного места мы будем называть оба этих условия *свойством нормализации.*

Напомним, что согласно результатам II.4.2 свойство нормализации выполнено для алгебраически замкнутых полей.

III.5.ii. Доказательство теоремы Жесткости. Основная цель данного параграфа — доказать следующую теорему, которая влечет теорему III.5.3 в силу предложения II.3.5.

Теорема III.5.11. *Пусть* R *— Гензелево локальное кольцо над полем* k*, обладающее бесконечным полем частных* $\mathrm{Frac}(R) = F$*. Предположим, что* $E = E^{*,*}$ *— когомологическая псевдо-теория, заданная на категории* $\mathbf{Sm/k}$*,* $\ell E = 0$*, и* $\ell \in \mathbb{N}$ *обратимо в* R*. Предположим, более того, что псевдо-теория* E *нормализована (см. определение III.5.8) над полем* F*. Пусть* $f\colon M \to \operatorname{Spec} R$ *обозначает гладкий (равноразмерностный) аффинный морфизм относительной размерности* d*,* $s_0, s_1\colon \operatorname{Spec} R \to M$ *— два его сечения такие, что* $s_0(P) = s_1(P)$ *в замкнутой точке* P *спектра* $\operatorname{Spec} R$*. Тогда два индуцированных отображения* $s_0^*, s_1^*\colon E(M) \rightrightarrows E(R) \to E(F)$ *совпадают.*

Доказательство. Часть доказательства следует стратегии, предложенной Габбером (Gabber) [**24**, стр. 67-69] в случае алгебраической K-теории. Как замечено в [**24**, замечание, стр. 67], достаточно рассмотреть случай, когда f имеет относительную размерность один. Во-первых, избавимся от рассмотрения локальных колец и сведем нашу теорему к некоторой форме теоремы жесткости для полей. Для этого обозначим через M_F общий слой M, являющейся расслоенным произведением $M \underset{\operatorname{Spec} R}{\times} \operatorname{Spec} F$, отвечающим каноническому морфизму $\rho\colon \operatorname{Spec} F \to \operatorname{Spec} R$. Тогда отображения s_i индуцируют отображения $s_i^F\colon \operatorname{Spec} F \to M_F$ посредством замены базы, то есть достаточно показать, что $(s_0^F)^* = (s_1^F)^*$.

Для $s_i^F\colon \operatorname{Spec} F \to M_F$, положим: $P_i := \operatorname{Im}(s_i^F)$. Поскольку открытые окрестности точек P_0, P_1 образуют индуктивную систему, значение $(s_0^F)^* - (s_1^F)^*$ не зависит от выбора объемлющей открытой окрестности. Таким образом, достаточно проверить равенство $(s_0^F)^* = (s_1^F)^*$ для одной специально выбранной аффинной окрестности. Обозначая через $\overline{M}$ проективное замыкание M, а через C — нормализацию кривой $(\overline{M})_F$, мы сможем выбрать открытую окрестность U точек $\{s_0(R), s_1(R)\}$ в M так, что пучок относительных дифференциалов $\Omega_{M/R}$ и, следовательно, касательное расслоение, становятся тривиальными после ограничения на U. (Чтобы найти такую окрестность U, выберем, сначала, окрестность с желаемыми свойствами для точки $s_0(R)$ и заметим, что она автоматически будет содержать и $s_1(R)$, поскольку оба сечения совпадают в замкнутом слое.) Положим, далее: $Z := (\overline{M} - U)_{red}$, $C^\circ := U_F$, и $C_\infty := C - C^\circ$. Заметим, что касательное расслоение к C° также тривиально.

Ниже мы отождествляем обратимый пучок, соответствующий дивизору D, с его образом в группе Пикара $\operatorname{Pic}(C, C_\infty)$ и обозначаем через $\mathcal{O}(D)$ в случаях, когда это не вызывает разночтений. Напомним, что относительная группа Пикара $\operatorname{Pic}(C, C_\infty)$ определяется как множество классов изоморфизма пар $(\mathcal{L}, \psi)$, где $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на C и $\psi\colon \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_{C_\infty} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{C_\infty}$ — фиксированная тривиализация $\mathcal{L}|_{C_\infty}$. Относительная группа Пикара $\operatorname{Pic}(C, C_\infty)$ может быть также отождествлена с $H^1_{ét}(C, \mathcal{O}^*_{C,C_\infty})$. Данное утверждение выполнено для всякого замкнутого вложения схем $C_\infty \subset C$. (Детали см. [**24**, p. 67].)

Равенство $(s_0^F)^* = (s_1^F)^*$ легко выводится из следующих двух теорем:

Теорема III.5.12. *Для кривых C, C_∞, заданных выше, и любого натурального числа ℓ взаимно простого с* $\operatorname{Char} F$ *дивизор $\mathcal{O}_C(P_0 - P_1)$ является ℓ-делимым в группе* $\operatorname{Pic}(C, C_\infty)$.

Теорема III.5.13. *В вышеописанной ситуации существует билинейное спаривание:*

$$<,>\colon\ \operatorname{Pic}(C, C_\infty) \times E(C^\circ) \to E(F)$$

такое, что для всякого $c \in E(C^\circ)$ и F-рациональных точек $P_0, P_1 \in C^\circ$, выбранных выше, равенство

$$< \mathcal{O}_C(P_0 - P_1), c >= (s_0^F)^*(c) - (s_1^F)^*(c)$$

выполнено в $E(F)$.

Доказательство первой теоремы может быть найдено в работах [**24, 25, 75**]).

Перед тем, как доказывать теоремы III.5.12 и III.5.13, мы покажем, как вывести из них утверждение теоремы III.5.11. По теореме III.5.12, существует элемент $(\mathcal{L}, \psi)$ в $\operatorname{Pic}(C, C_\infty)$ такой, что $\ell(\mathcal{L}, \psi) = \mathcal{O}_C(P_0 - P_1)$. Тогда, по теореме III.5.13, для всякого элемента $c \in E(C^\circ)$ имеем:
(III.5.2)

$$(s_0^F)^*(c) - (s_1^F)^*(c) =< \mathcal{O}_C(P_0 - P_1), c >= \ell < (L, \psi), c >= 0,$$

что и доказывает теорему III.5.11. □

Доказательство теоремы III.5.12. Рассмотрим следующую короткую точную последовательность этальных пучков:

$$0 \to j_!\mu_\ell \to \mathcal{O}^*_{C,C_\infty} \xrightarrow{\ell} \mathcal{O}^*_{C,C_\infty} \to 0, \tag{III.5.3}$$

в которой $C^\circ \overset{j}{\hookrightarrow} C \overset{i}{\leftarrow} C_\infty$ и $\mathcal{O}^*_{C,C_\infty}$ определено как пучок $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}^*_C \to i_*\mathcal{O}^*_{C_\infty})$.

Выпишем, теперь, фрагмент когомологической длинной точной последовательности, ассоциированной с (III.5.3) в следующем виде:

$$\mathrm{Pic}(C, C_\infty) \xrightarrow{\ell} \mathrm{Pic}(C, C_\infty) \xrightarrow{\delta_F} H^2_{\acute{e}t}(C, j_!\mu_\ell). \tag{III.5.4}$$

Используя определения C, C_∞, легко видеть, что условия предложения [**24**, предложение 4] в этом случае выполнены. (Слегка отличное доказательство Суслина–Воеводского [**75**] требует, в этом месте, существования «хорошей компактификации».) Следовательно, в нашей ситуации каждый элемент группы $\mathrm{Pic}(C, C_\infty)$ имеет вид $\mathcal{O}_C(D)$ для некоторого дивизора $D \in \mathrm{Div}(C, C_\infty)$. Здесь $\mathrm{Div}(C, C_\infty)$ обозначает группу дивизоров Картье на C с носителем, не пересекающим C_∞. Если $\delta_F(\mathcal{O}_C(D)) = 0$, вышеприведенная точная последовательность влечет равенство $D = \ell D' + \mathrm{div}(f)$ в $\mathrm{Div}(C, C_\infty)$ для подходящего дивизора D' и некоторой мероморфной функции f на C, регулярной в окрестности C_∞ и удовлетворяющей условию $f|_{C_\infty} = 1$. Чтобы проверить, что $\delta_F(\mathcal{O}_C(P_0 - P_1)) = 0$, достаточно показать, что класс $s_0 - s_1 := s_0(\mathrm{Spec}\, R) - s_1(\mathrm{Spec}\, R)$ в относительной группе Пикара пары $(\overline{M}, Z)$ лежит в группе $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}(\overline{M}, Z) \xrightarrow{\delta} H^2_{\acute{e}t}(\overline{M}, J_!\mu_\ell))$, где $J\colon \overline{M} - Z \to \overline{M}$. Ясно, что класс дивизора $P_0 - P_1$ возникает как обратный образ $s_0 - s_1$ при ограничении к слою над общей точкой. Наконец, мы покажем, следуя [**24, 75**], что $\delta(s_0 - s_1) = 0$. Пусть $\overline{M}_\omega = \overline{M} \times_{\operatorname{Spec} R} \omega$ — специальный слой морфизма $\overline{M} \to \operatorname{Spec} R$. Мы имеем коммутативную диаграмму

(III.5.5)
$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Pic}(\overline{M}, Z) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^2_{\acute{e}t}(\overline{M}, J_!\mu_\ell) \arrow[d, "r"] \\
\operatorname{Pic}(\overline{M}_\omega, Z_\omega) \arrow[r, "\delta_\omega"] & H^2_{\acute{e}t}(\overline{M}_\omega, J_{\omega !}\mu_\ell),
\end{tikzcd}$$

где $J_\omega \colon \overline{M}_\omega - Z_\omega \to \overline{M}_\omega$. По теореме о собственной замене базы [**29**, следствие XII.5.5],[**52**] получаем, что отображение r — изоморфизм. Поскольку сечения s_0 и s_1 совпадают в замкнутой точке ω, отображение α нулевое на классе $s_0 - s_1$. Утверждение $\delta(s_0 - s_1) = 0$ следует, что и заканчивает доказательство теоремы. ☐

Замечание III.5.14. Несложно видеть, что утверждение теоремы о собственной замене базы

(III.5.6)
$$H^2_{\acute{e}t}(\overline{M}, J_!\mu_\ell) \simeq H^2_{\acute{e}t}(\overline{M}_\omega, J_{\omega !}\mu_\ell)$$

представляет, по сути, частный случай теоремы жесткости для этальных когомологий.

Для доказательства теоремы III.5.13, нам понадобятся следующие дополнительные определения.

Определение III.5.15. Пусть даны конечное сепарабельное расширение полей L/F и замкнутое вложение $\mathcal{F} \colon \operatorname{Spec} L \hookrightarrow \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_F$. Определим отображение $tr^{\mathcal{F}}_{L/F} \colon E(L) \to E(F)$ следующим образом. Выберем, сперва, тривиализацию нормального расслоения $\Phi \colon \mathcal{N}_{\mathbb{A}^n_F/\operatorname{Spec} L} \simeq \mathbb{A}^n_L$. Затем, определим $tr^{\mathcal{F}}_{L/F} = (f, \mathcal{F}, \Phi)_!$ как трансфер Беккера–Готтлиба, отвечающий морфизму $f\colon \operatorname{Spec} L \overset{\mathcal{F}}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n_F \to \operatorname{Spec} F$.

Замечание III.5.16. Если теория E удовлетворяет условию нормализации над F, то вышеприведенное определение не зависит от выбора изоморфизма Φ. Чтобы это проверить, напомним, что отображение трансфера определяется III.3.4, как композиция

$$E(L) = E_L(L) \to E^{[n]}_{L\times\{0\}}(\mathbb{A}^n_L) \xrightarrow{\Phi} E^{[n]}_L(\mathcal{N}_{\mathbb{A}^n_F/L}) \to E^{[n]}_L(\mathbb{A}^n_F) \to E(F).$$

Поскольку две различные тривиализации могут отличаться только на автоморфизм $\mathbb{A}^n_L$, который, по свойству нормализации, индуцирует тождественное отображение на $E^{[n]}_{L\times\{0\}}(\mathbb{A}^n_L)$ (ср. II.4.1), полученные в результате трансферы совпадают. Полученное отображение tr, вообще говоря, зависит от выбора разложения f!

Определим, теперь, группу $\widetilde{\operatorname{Pic}}(C, C_\infty)$, и построим, сначала, спаривание

$$<,>\colon \operatorname{Pic}(C, C_\infty) \times E(C^\circ) \to E(F). \tag{III.5.7}$$

Определение III.5.17. Пусть C — неособая проективная кривая над полем F. Дивизор на C мы будем называть *сепарабельным* если он может быть записан как $\sum a_i D_i$ таким образом, что структурные морфизмы $D_i\colon \operatorname{Spec} L_i \to \operatorname{Spec} F$ задаются конечными сепарабельными расширениями полей L_i/F. Сепарабельный дивизор, имеющий все кратности a_i равными ± 1, будет называться *неразветвленным.* Если f — мероморфная функция, такая что $\operatorname{div}(f)$ неразветвленный, мы будем также говорить, что функция f *неразветвленная.*

Для неособой проективной кривой C с плотным открытым подмногообразием C° положим $C_\infty := C - C^\circ$. Обозначим через $\mathrm{Div}_S(C, C_\infty) \subset \mathrm{Div}(C, C_\infty)$ подгруппу, порожденную сепарабельными дивизорами на C с носителем, не пересекающим C_∞. Также обозначим через $\mathcal{M}$ (мультипликативную) группу всех мероморфных функций на C, принимающих значение 1 на C_∞, и будем использовать это же обозначение для соответствующей подгруппы в $\mathrm{Div}(C, C_\infty)$. Наконец, положим:

$$\widetilde{\mathrm{Pic}}(C, C_\infty) = \mathrm{Div}_S(C, C_\infty)/(\mathrm{Div}_S(C, C_\infty) \frown \mathcal{M}). \tag{III.5.8}$$

Построим, теперь, желаемое спаривание.

Определение III.5.18. Для C, C° и $C_\infty := C - C^\circ$, определенных выше, и регулярного замкнутого вложения $\mathcal{F}\colon C^\circ \hookrightarrow \mathbb{A}^n_F$, зададим билинейное спаривание $<,>^{\mathcal{F}}\colon \mathrm{Div}_S(C, C_\infty) \otimes E(C^\circ) \to E(F)$ следующим образом. Для дивизора $D = \sum_i a_i(\mathrm{Spec}\, L_i \xrightarrow{x_i} C^\circ)$ и элемента $c \in E(C^\circ)$, положим:

$$< D, c >^{\mathcal{F}} = \sum_i a_i tr^{\mathcal{F}x_i}_{L_i/F} x_i^*(c),$$

где L_i/F суть соответствующие конечные расширения полей.

Из замечания III.5.16 следует, что построенное спаривание корректно определено. Выполнение условия $< \mathcal{O}_C(P_0 - P_1), c >^{\mathcal{F}} = (s_0^F)^*(c) - (s_1^F)^*(c)$ теоремы III.5.13 обеспечивается предложением III.5.9.

Предложение III.5.19. *Для C, C° и C_∞ как в III.5.18, выберем регулярное замкнутое вложение $\mathcal{F}\colon C^\circ \hookrightarrow \mathbb{A}^n_F$. Пусть $f\colon C \to \mathbb{P}^1_F$ — мероморфная функция, такая что* $\mathrm{div}(f) \in$

$\mathrm{Div}_S(C, C_\infty) \frown \mathcal{M}$. *Тогда отображение* $< \mathrm{div}(f), - >^{\mathcal{F}}$ *тривиально.*

Доказательство. Предположим, сперва, что f — неразветвленная. Тогда рассуждения почти повторяют доказательство теоремы III.4.2. Обозначим через $\tilde{C}^\circ$ открытое подмножество $f \neq 1$ в C°. Так как морфизм $(\mathcal{F}, f)\colon C^\circ \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^1$ — замкнутое вложение, мы получаем (после естественного отождествления $\mathbb{A}^1$ с $\mathbb{P}^1 - \{1\}$) замкнутое вложение $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, f)_{\tilde{C}^\circ}\colon \tilde{C}^\circ \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$. Напомним, что выбор окрестности U (см. стр 122) и, следовательно, $\tilde{C}^\circ$, обеспечивает, согласно доказательству утверждения III.4.2 тот факт, что вложение $\mathcal{G}\colon \tilde{C}^\circ \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ имеет тривиальное нормальное расслоение. Таким образом, морфизм $\tilde{C}^\circ \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbb{A}^1$ принадлежит к классу C_{triv}. Полагая $D = \mathrm{div}_0(f)$ — локус $f = 0$ и $D' = \mathrm{div}_\infty(f)$ — локус $f = \infty$, покажем, что $< D, - >^{\mathcal{F}} = < D', - >^{\mathcal{F}}$. Рассмотрим квадрат, индуцированный ограничением функции f на ее слой над точкой $\{0\}$. Этот квадрат коммутативен по свойствам замены базы и аддитивности.

(III.5.9)
$$\begin{tikzcd}
E(\tilde{C}^\circ) \arrow[r, "\oplus x_i^*"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "f_!^{\mathcal{G}}"'] & \bigoplus\limits_{x_i \in f^{-1}\{0\}} E(\mathrm{Spec}\, L_i) \arrow[d] \arrow[ddr, "\oplus (f|_{x_i})_!^{\mathcal{G}}"] & \\
E(\mathbb{A}^n_F \times \mathbb{A}^1_F) \arrow[d] & \oplus E(\mathbb{A}^n_F \times \{0\}) \arrow[d] & \\
E(\mathbb{A}^1_F) \arrow[r, "\simeq", "i_0^*"'] & E(\{0\}) \arrow[r, equal] & E(\mathrm{Spec}\, F)
\end{tikzcd}$$

Здесь расширения полей L_i/F соответствуют точкам x_i, лежащим над точкой $\{0\}$.

Для всякой точки $x \in f^{-1}\{0\}$, имеем: $\mathcal{F}|_x \times \{0\} = \mathcal{G}|_x$. Следовательно, отображение трансфера, которому отвечает правая наклонная стрелка диаграммы, может быть переписано в виде суммы слагаемых вида $tr_{L_i/F}^{\mathcal{F}|_{x_i}}$, то есть не зависит от f.

Из диаграммы видно, что $i_0^* f_!^{\mathcal{G}} = \sum_{x_i} tr_{L_i/F}^{\mathcal{F}|_{x_i}} x_i^* =< D, - >^{\mathcal{F}}$. Поскольку аналогичное утверждение справедливо и над точкой $\{\infty\}$, а отображения i_0^*, i_∞^* совпадают (по свойству гомотопической инвариантности), утверждение предложения доказано. $\square$

Покажем, теперь,что всякий дивизор Q из $\mathrm{Div}_S(C, C_\infty) \frown \mathcal{M}$ может быть записан как сумма неразветвленных главных дивизоров, допускающих представление функциями, принимающими значение 1 на C_∞. Для этого применим нижеследующую лемму к главному дивизору $Q = \mathrm{div}(f)$, что и закончит доказательство предложения III.5.19.

Лемма III.5.20. *Всякий дивизор* $D \in \mathrm{Div}_S(C, C_\infty)$ *может быть записан в виде* $D = \sum_i \mathrm{div}(g_i) + D'$, *где* $g_i \in \mathcal{M}$ *и все дивизоры в правой части лежат в подгруппе* $\mathrm{Div}_S(C, C_\infty)$ *и неразветвлены.*

Докажем, сперва, следующее вспомогательное утверждение.

Лемма III.5.21. *Для любого целого числа* n, *любой точки* P *на кривой* C° *и всякого конечного множества точек* $Z \subset C$ *существует дивизор* $Q \in \mathrm{Div}_S(C, C_\infty)$, *обладающий следующими свойствами:*

(1) $nP \sim Q$ *в группе* $\operatorname{Pic}(C, C_\infty)$ *(в частности, эквивалентность обеспечивается функцией, принимающей значение* 1 *на* C_∞*);*

(2) дивизор Q *неразветвлен;*

(3) $\operatorname{Supp} Q \frown Z = \emptyset$.

Доказательство. Доказательство представляет собой несложную модификацию рассуждения Воеводского [**88**, лемма 3.16]. Поскольку кривая C° — гладкая над полем k, на ней существует бесконечно много точек с сепарабельными полями вычетов. Следовательно, мы можем выбрать конечное множество таких точек $R_1, \ldots, R_n$ не пересекающееся с Z и мероморфную функцию g на кривой C, такую, что $g|_{C_\infty} = 0$ и g имеет полюса только в точках P и $R_1, \ldots, R_n$ с кратностями $n[k_P \colon k], [k_{R_1} \colon k], \ldots, [k_{R_n} \colon k]$, соответственно. (Ясно, что достаточно рассматривать случай $n > 0$.) Функция g, рассматриваемая как морфизм $C \to \mathbb{P}^1_k$, — гладкая в точках R_i. Следовательно, она гладкая и почти всюду, кроме, быть может, некоторого конечного множества точек S. Таким образом, существует рациональная точка $Y \in \mathbb{P}^1_k$ такая, что $Y \notin g(S) \smile g(Z) \smile \{0\} \smile \{\infty\}$. Отображение g гладкое над Y. Положим $f = (y - g)/y$. Легко проверить, что функция f осуществляет искомую эквивалентность между дивизорами nP и $Q = \operatorname{div}(f) - nP$ и дивизор Q обладает требуемыми свойствами. □

Доказательство леммы III.5.20. Проведем индукцию по мощности носителя дивизора D. Если носитель содержит только одну точку, доказываемое утверждение следует из леммы III.5.21, где мы положим $P = \operatorname{Supp} D$, n равно кратности дивизора D и

$Z = \emptyset$. Пусть теперь $D = \bar{D} + nP$, где $\operatorname{Supp} \bar{D} \frown P = \emptyset$ и $\bar{D}$ эквивалентен неразветвленному сепарабельному дивизору $\bar{Q}$. Применяя, теперь, лемму III.5.21 к точке P с кратностью n и множеству $Z = \operatorname{Supp} \bar{Q} \smile \operatorname{Supp} \bar{D}$, получим $P \sim Q$ для сепарабельного неразветвленного дивизора Q. Полагая $D' = \bar{Q} \smile Q$, получаем искомое разложение. □

Замечание III.5.22. Заметим, что доказательство леммы III.5.21, как и доказательство подобной леммы в работе Воеводского, написано для кривых, имеющих гладкую компактификацию, в то время как над полями конечной характеристики мы можем, вообще говоря, рассчитывать лишь на неособую компактификацию. (Пример гладкой аффинной кривой, не имеющей гладкой компактификации может быть найден в [**31**, упражнение III.10.1].) К счастью, данное условие не является существенным, поскольку теорема Римана–Роха, неявно используемая в доказательстве, выполняется также и без этого предположения (см., например [**48**, параграф 7.3.2]).

Мы построили, таким образом, желаемое спаривание для группы $\widetilde{\operatorname{Pic}}(C, C_\infty)$. Следующее предложение III.5.23 показывает, что на самом деле, нами уже построено спаривание, необходимое для доказательства теоремы III.5.13.

Предложение III.5.23. *Естественное отображение* $\widetilde{\operatorname{Pic}}(C, C_\infty) \rightarrow \operatorname{Pic}(C,$ *— изоморфизм.*

Доказательство. Инъективность легко следует из определений. Сюръективность следует из леммы III.5.21. □

Замечание III.5.24. Заметим, что мы не можем заменить аргументы, использованные нами в доказательстве теоремы III.5.13, аргументами [**25**, лемма 2.2]. Поскольку в доказательстве Жилле–Томасона (Gille–Thomason) дивизоры могут иметь кратные точки, это потребовало бы определения трансферов для случая конечных морфизмов $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} F$, где L, вообще говоря, не является полем и, далее, проверки свойства нормализации для таких L. Более того, квадраты, для которых мы должны проверять свойство замены базы, становятся в этих случаях нетрансверсальными.

III.5.iii. Применения. Докажем, теперь, следствие III.5.5. Первое утверждение получается применением следствия III.5.4, к функтору $\tilde{E}(Y) := E(Y \times X)$. Заметим, что поскольку функтор E представимый, используя существование внутренних Hom-объектов (ср. [**41**, p. 459]), можно показать что теория $\tilde{E}$ также представима. В этом, конечно, можно убедиться и непосредственно, подобно тому, как это было проделано в предложении II.6.1. Условия, наложенные нами на функтор E, очевидно, влекут тот факт, что для $\tilde{E}$ выполнено условие нормализации относительно поля F. Заметим, что все ориентируемые теории удовлетворяют ТПР и, таким образом, нашей гипотезе.

Докажем, теперь, последнее утверждение следствия III.5.5. Нам понадобится следующее несложное свойство внешнего когомологического произведения (см. II.5.3). Предположим, что теория E представима коммутативным кольцевым T-спектром $\mathcal{E}$. Группа коэффициентов $E(S^0) = E$ становится, в рассматриваемом случае, би-градуированным коммутативным кольцом с единицей (классом «единичного» морфизма $\iota\colon S^0 \to \mathcal{E}$). После естественных отождествлений $S^0 \wedge X = X = X \wedge S^0$, все группы $E(X)$ становятся (посредством действия внешним произведением) E-бимодулями, а отображение $E(X) \otimes_E E(Y) \xrightarrow{\wedge} E(X \wedge Y)$ — гомоморфизмом E-бимодулей. Внешнее произведение $\wedge$ функториально в следующем смысле. Пусть $f\colon U \to W$. Тогда, для каждого V, следующая диаграмма коммутативна:

(III.5.10)
$$\begin{tikzcd}
E(W) \otimes_E E(V) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "f^* \otimes \mathrm{id}"] & E(W \wedge V) \arrow[d, "(f \wedge \mathrm{id})^*"] \\
E(U) \otimes_E E(V) \arrow[r, "\wedge"] & E(U \wedge V).
\end{tikzcd}$$

С этого момента мы рассматриваем X и $\mathbb{P}^1$ как многообразия без отмеченных точек, а знак $(\ )_+$ обозначает несвязное добавление отмеченной точки к многообразию. Напомним, что $\operatorname{Spec} k_+ = S^0$. Мы будем также опускать обозначение надстроечного спектра Σ_T^∞, отождествляя пунктированные многообразия и отвечающие им спектры. Доказываемое утверждение немедленно следует из предложения ниже, поскольку по условию эпиморфности (индуцированное гомотетией) отображение d^* из доказательства леммы II.4.6 тождественно.

Предложение III.5.25. *Пусть E — теория когомологий, представимая коммутативным кольцевым T-спектром. Пусть также $\lambda\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ — морфизм, который индуцирует тождественный эндоморфизм λ^* на группах когомологий $E(\mathbb{P}^1_+)$. Тогда, для всякого многообразия $X \in$ **Sm/k**, эндоморфизм $\Lambda^* = (\lambda \times \mathrm{id})^*\colon E((\mathbb{P}^1 \times X)_+) \to E((\mathbb{P}^1 \times X)_+)$ также является тождественным.*

Доказательство. Напомним, что $\mathbb{P}^1_+ \wedge X_+ = (\mathbb{P}^1 \times X)_+$ и положим $U = W = \mathbb{P}^1_+$, $V = X_+$, и $f = \lambda$ в диаграмме выше. Покажем, теперь, что отображение произведения $E(\mathbb{P}^1_+) \otimes_E E(X_+) \to E(\mathbb{P}^1_+ \wedge X_+)$ является изоморфизмом E-модулей. Рассмотрим расщепляющуюся последовательность пунктированных пространств $\begin{tikzcd}S^0 \arrow[r, shift left] & \mathbb{P}^1_+ \arrow[l, shift left] \arrow[r] & T\end{tikzcd}$, где T, как обычно, обозначает объект Тэйта, естественно изоморфный T-надстройке над S^0. Переходя к когомологиям, беря тензорное произведение с $E(X_+)$ и $\wedge$-произведение с X с другой стороны, получаем следующую коммутативную диаграмму расщепляющихся коротких точных последовательностей E-модулей:

(III.5.11)

$$\begin{tikzcd}
E(T) \otimes_E E(X_+) \arrow[r] \arrow[d, "\wedge"] & E(\mathbb{P}^1_+) \otimes_E E(X_+) \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\wedge"] & E(S^0) \otimes_E E(X_+) \arrow[l, shift left] \arrow[d, equal, "\wedge"] \\
E(T \wedge X_+) \arrow[r] & E(\mathbb{P}^1_+ \wedge X_+) \arrow[r, shift left] & E(S^0 \wedge X_+) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

Легко проверить, что отображение τ, посылающее $\alpha \in E(T \wedge X_+)$ в $\tau(\alpha) = \Sigma_T(1) \otimes \Sigma_T^{-1}(\alpha) \in E(T) \otimes_E E(X_+)$ является обратным к $\wedge$. Таким образом, отображение произведения $E(T) \otimes_E E(X_+) \xrightarrow{\wedge} E(T \wedge X_+)$ есть изоморфизм и искомое предложение доказано, так как $\Lambda^* = \wedge \circ (\lambda^* \otimes \mathrm{id}) \circ (\wedge^{-1}) = \mathrm{id}$. $\square$

Группы Витта схем W^* представимы мотивным спектром KT (см. [**33**, теорема 5.8]). Известно, что эти группы независимы от веса, то есть $W^{i,m} = W^{i-m,0} = W^{i-m}$ (см. [**33**, следствие 5.7]). Таким образом, нужное нам утверждение о группах Витта связано со следующим результатом (случай W^0 с целыми коэффициентами был установлен много ранее в работе Арасона(Arason) [**12**]) являющимся следствием [**33**].

Предложение III.5.26. *Для всякого поля K характеристики, отличной от 2, вложение $\mathbb{P}^1_K \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K$ индуцирует эпиморфизмы*

$$W^i(\mathbb{P}^2_K, \ell) \to W^i(\mathbb{P}^1_K, \ell) \text{ для } \ i = 2, 3.$$

Доказательство. Используя тот факт, что $W^i(K) = 0$ для $i = 1, 2, 3$ (см. [**13**, теорема 5.6]), мы получаем короткую точную последовательность: $W^3(K, \ell) \to W^0(K) \to W^0(K) \to W^0(K, \ell)$. Нам также известно, что $W^1(K, \ell) = 0 = W^2(K, \ell)$. Эти утверждения, вместе с длинной точной последовательностью, ассоциированной с гомотопическим расслоением $\Omega^2 KT(K) \to KT(\mathbb{P}^2_K) \to KT(\mathbb{P}^1_K)$ из [**33**, предложение 6.2] (напомним, что здесь KT обозначает мотивный спектр, представляющий группы Витта) с конечными коэффициентами, доказывают предложение. □

Из только что доказанного предложения, замечания III.5.10 и леммы II.4.6, получается утверждение теоремы жесткости для $W^i(-, \ell)$ если $i = 1, 2$ и $X = \operatorname{Spec} k$. К сожалению, в этом случае, вовлеченные группы оказываются нулевыми (см. [**13**, теорема 5.6]). Поэтому, кажется разумным следующее применение полученного результата. Допустим, нам известна некоторая дополнительная информация о ℓ-кручении в группах $W^*(X)$. Например, мы знаем, что для некоторого многообразия X выполнено равенство $W^*(X, \ell) = 0$. Применяя [**33**, предложение 6.2] и доказанный результат, мы видим, что $W^*(X \times_k \mathcal{O}^h_{M,P}, \ell) = 0$.

Замечание III.5.27. Мы закончим данный параграф, заметив, что даже если бы доказанные теоремы жесткости выполнялись для KO и W для всех бистепеней, этого было бы недостаточно, чтобы доказать аналог теоремы 1 Габбера [**24**, следствие 1]. Чтобы последовать предложенной им стратегии нужно, вероятно, доказать результаты, аналогичные предложению 1.3 и следствию 1.6 из работы Суслина [**77**], используя ортогональную группу вместо GL.

Глава IV

Теорема двойственности Пуанкаре

Как уже было отмечено нами ранее, теорема двойственности Пуанкаре (Poincaré) принадлежит к числу основополагающих классических результатов алгебраической топологии. В современной формулировке, в том виде, который разумно пробовать перенести в алгебро-геометрический контекст, этот результат может быть сформулирован следующим образом.

Рассмотрим коммутативный кольцевой спектр E. В определенных случаях такой спектр может быть снабжен выделенным элементом $c \in E^2(\mathbb{P}^\infty)$, называемым комплексной ориентацией спектра E (см. [**11**]). Пара (E, c) называется комплексно-ориентированным кольцевым спектром. При наличии комплексной ориентации c спектра E всякое гладкое комплексное проективное многообразие X может быть снабжено гомологическим классом $[X] \in E_{2d}(X)$, называемым фундаментальным классом многообразия X (здесь d обозначает комплексную размерность X). Этот класс обладает тем важным свойством, что $\frown$-произведение

$$\frown [X] \colon E^*(X) \to E_{2d-*}(X) \tag{IV.0.12}$$

задает изоморфизм групп гомологии и когомологий многообразия X. Такой изоморфизм часто называется изоморфизмом двойственности Пуанкаре. С современной точки зрения представляется интересным взглянуть на возможные аналоги приведенного результата в контексте алгебраической геометрии. Для этого зафиксируем некое поле k и рассмотрим симметрический коммутативный кольцевой T-спектр $\mathcal{E}$. Он задает биградуированные теории гомологии и когомологий $E_{*,*}$ и $E^{*,*}$ на категории алгебраических многообразий. В некоторых случаях, мы можем снабдить спектр $\mathcal{E}$ выделенным элементом $\gamma \in E^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$, называемым, следуя Морелю (Morel), ориентацией $\mathcal{E}$. Следуя ему же, пара $(\mathcal{E}, \gamma)$ называется ориентированным симметрическим коммутативным кольцевым, T-спектром. Ориентация γ позволяет снабдить как когомологии $E^{*,*}$, так и гомологии $E^{*,*}$ (см. [**65**]) трансферами (отображениями следа) для класса всех проективных морфизмов C_{proj}. Это означает, что для всякого проективного морфизма $f\colon Y \to X$ гладких неприводимых многообразий над k и $d = \dim(X) - \dim(Y)$ существуют операторы $f_!\colon E^{*,*}(Y) \to E^{*+2d,*+d}(X)$ и $f^!\colon E_{*,*}(X) \to E_{*-2d,*-d}(Y)$, удовлетворяющие списку естественных свойств. Определим теперь фундаментальный класс гладкого проективного равноразмерностного многообразия X/k размерности d как $[X]\colon = \pi^!(1) \in E_{2d,d}(X)$, где $\pi\colon X \to \mathrm{pt}$ — структурный морфизм. Основной результат данной главы утверждает, что отображение

$$\text{(IV.0.13)} \qquad \frown [X]\colon E^{*,*}(X) \xrightarrow{\simeq} E_{2d-*,d-*}(X)$$

является сохраняющим градуировку изоморфизмом (изоморфизмом двойственности Пуанкаре).

Среди теорий, представимых T-спектрами, существуют, по крайней мере два интересных и важных примера, удовлетворяющих условиям нашей теоремы. Первый - симметрическая модель $\mathbb{MGL}$ спектра алгебраических кобордизмов $\mathbf{MGL}$ Воеводского (Voevodsky) [**85**, стр.601]. Этот симметрический коммутативный кольцевой T-спектр, вместе с ориентацией $\gamma \in MGL^{2,1}(\mathbb{P}^\infty)$ описан нами в предложении II.6.9. Таким образом, каждое гладкое неприводимое проективное многообразие X/k размерности d обладает фундаментальным классом $[X] \in MGL_{2d,d}(X)$ и $\frown$-произведение с этим классом

$$\frown [X] \colon MGL^{*,*}(X) \xrightarrow{\cong} MGL_{2d-*,d-*}(X) \tag{IV.0.14}$$

является изоморфизмом. Второй пример — алгебраическая версия спектра Эйленберга-Мак Лейна (Eilenberg-Mac Lane) $\mathbf{H}_M$, представляющего мотивные когомологии. Этот T-спектр построен в работе [**85**, стр. 598], его ориентация обсуждается нами в II.6.iii. Подобно случаю алгебраических кобордизмов, можно построить фундаментальный класс $[X] \in H^{\mathcal{M}}_{2d,d}(X)$ в мотивных гомологиях и изоморфизм:

$$\frown [X] \colon H^{*,*}_{\mathcal{M}}(X) \xrightarrow{\cong} H^{\mathcal{M}}_{2d-*,d-*}(X). \tag{IV.0.15}$$

Чтобы подчеркнуть нетривиальность полученного результата, отметим, что в отличие от «классического» топологического случая, в алгебро-геометрическом контексте каноническое спаривание $\mathrm{H}^{*,*}_{\mathcal{M}}(X) \otimes \mathrm{H}^{\mathcal{M}}_{*,*}(X) \to \mathrm{H}^{*,*}_{\mathcal{M}}(\mathrm{pt})$ является, вообще говоря, вырожденным даже с рациональными коэффициентами [**83**].

IV.1. Теорема двойственности Пуанкаре

Как нам уже известно (см. стр. 61), умножение в когомологиях, отвечающих ориентированному коммутативному кольцевому T-спектру, удовлетворяет следующему условию кососкоммутативности. Для $\alpha \in E^{p,q}$ и $\beta \in E^{p',q'}$, $\alpha \smile \beta = (-1)^{pp'}(\beta \smile \alpha)$. Таким образом, в этом случае удобно рассматривать группы $E^0 = \oplus_{p,q} E^{2p,q}$, $E^1 = \oplus_{p,q} E^{2p-1,q}$, $E_0 = \oplus_{p,q} E_{2p,q}$, и $E_1 = \oplus_{p,q} E_{2p-1,q}$, где $E^{*,*}$ (соотв. $E_{*,*}$) — (ко-)гомологии, представимые T-спектром $\mathcal{E}$. Функторы $E^* = E^0 \oplus E^1 \colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbb{Z}/2\text{-}\mathbf{Ab}$ and $E_* = E_0 \oplus E_1 \colon \mathbf{Sm/k} \to \mathbb{Z}/2\text{-}\mathbf{Ab}$ являются теориями (ко-)гомологий, принимающими значение в категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных абелевых групп. Несмотря на то, что все результаты настоящей главы верны и для дважды $\mathbb{Z}$-градуированных теорий, для простоты мы будем работать (всюду, кроме последнего раздела) с только что введенными $\mathbb{Z}/2$-градуированными теориями.

Определение IV.1.1. Пусть пара $(\mathcal{E}, \gamma)$ является ориентированным симметрическим кольцевым T-спектром. Тогда для проективного многообразия X, снабженного структурным морфизмом $\pi \colon X \to \mathrm{pt}$ мы называем элемент $\pi^!(1) \in E_0(X)$ *фундаментальным классом* X и обозначаем его через $[X]$. Таким образом, фундаментальный класс принимает значение в ассоциированной со спектром $\mathcal{E}$ теории гомологий E_*.

Замечание IV.1.2. Несмотря на то, что фундаментальный класс $[X]$ зависит скорее от пары (E_*, γ) чем от собственно T-спектра $\mathcal{E}$, мы будем, в дальнейшем, часто опускать упоминание об ориентации, поскольку ее выбор предполагается фиксированным для каждого спектра $\mathcal{E}$ на протяжении всего изложения.

Определим отображения двойственности следующим образом:

$$\mathcal{D}^{\bullet}\colon E^*(X) \to E_*(X) \quad \text{как} \quad \mathcal{D}^{\bullet}(\alpha) = \alpha \frown [X] \tag{IV.1.1}$$

и

$$\mathcal{D}_{\bullet}\colon E_*(X) \to E^*(X) \quad \text{как} \quad \mathcal{D}_{\bullet}(a) = \Delta_!(1)/a. \tag{IV.1.2}$$

Теорема IV.1.3 (Двойственность Пуанкаре). *Пусть* $(\mathcal{E}, \gamma)$ *— ориентированный симметрический коммутативный кольцевой* T*-спектр. Тогда, для произвольного проективного многообразия* X *отображения* $\mathcal{D}^{\bullet}$ *и* $\mathcal{D}_{\bullet}$ *являются взаимно обратными изоморфизмами.*

Предполагая, что многообразие X — равноразмерностное размерности d, имеем: $[X] \in E_{2d,d}(X)$. В этом случае изоморфизм $\mathcal{D}^{\bullet}$ отождествляет группы $E^{p,q}$ и $E_{2d-p,d-q}$.

Пользуясь утверждением теоремы двойственности Пуанкаре, легко получить формулы для трансферов (гомоморфизмов следа), в том же виде, в котором они часто возникают в топологии.

Следствие IV.1.4. *Для проективных многообразий* $X, Y \in$ $\mathbf{Sm/k}$ *и морфизма* $f\colon X \to Y$*, положим:*

$$f_! = \mathcal{D}^Y_{\bullet} f_* \mathcal{D}^{\bullet}_X \qquad \text{и} \qquad f^! = \mathcal{D}^{\bullet}_X f^* \mathcal{D}^Y_{\bullet},$$

где $\mathcal{D}_X$ *и* $\mathcal{D}_Y$ *обозначают определенные выше операторы двойственности для многообразий* X *и* Y*.*

Доказательство. Чтобы проверить первое равенство, необходимо лишь убедиться, что $f_*\mathcal{D}^\bullet_X = \mathcal{D}^\bullet_Y f_!$. Если принять во внимание, что $[X] = f^![Y]$, то желаемое равенство немедленно следует из первой формулы проекции (см. теорему IV.1.5 ниже).

Доказательство второго равенства, которое мы опускаем, проводится аналогично, с использованием «двойственной» формулы проекции. ☐

Доказательство теоремы IV.1.3 основывается на двух формулах проекции для $\frown$- и $/$-произведений.

Теорема IV.1.5 (Первая формула проекции). *Для $X, Y \in$ **Sm/k**, проективного морфизма $f\colon Y \to X$, произвольных элементов $\alpha \in E^*(Y)$ и $a \in E_*(X)$, в группе $E_*(X)$ выполнено соотношение:*

$$f_*(\alpha \frown f^!(a)) = f_!(\alpha) \frown a. \tag{IV.1.3}$$

В дальнейшем, нам понадобятся некоторые простые следствия этой теоремы.

Следствие IV.1.6. *Пусть $\tau\colon X\times X \to X\times X$ — перестановочный морфизм. Тогда, для элементов $\alpha \in E^*(X)$, $\beta \in E^*(X \times X)$ и $a \in E_*(X \times X)$, имеем:*

*(**a**)*

$$\Delta_!(\alpha) \frown a = \Delta_!(\alpha) \frown \tau_*(a)$$

*(**b**)*

$$\Delta_!(\alpha) \smile \beta = \Delta_!(\alpha) \smile \tau^*(\beta)$$

в группе $E_*(X \times X)$ ($E^*(X \times X)$, соответственно).

Доказательство. Рассмотрим декартов квадрат

(IV.1.4)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & X \times X \arrow[d, "\tau"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X. \end{tikzcd}$$

Так как морфизм τ плоский, этот квадрат трансверсален (см. A.1). По свойству трансверсальной замены базы B.1, имеем: $\Delta^!\tau_* = \Delta^!$. Из теоремы IV.1.5 следует:

$$\Delta_!(\alpha) \frown a = \Delta_*(\alpha \frown \Delta^!(a)) = \Delta_*(\alpha \frown \Delta^!(\tau_*(a))) = \Delta_!(\alpha) \frown \tau_*(a),$$

что влечет (**a**).

Доказательство формулы (**b**) отличается использованием когомологической формулы проекции вместо IV.1.5. ☐

Теорема IV.1.7 (Вторая формула проекции). *Пусть* $f\colon Y \to X$ *— проективный морфизм гладких многообразий. Пусть также* $W \in \mathbf{Sm/k}$. *Тогда, для всяких* $\alpha \in E^*(W \times Y)$ *и* $a \in E_*(X)$, *имеем (в* $E^*(W)$*):*

(IV.1.5)
$$\alpha/f^!(a) = F_!(\alpha)/a,$$

где $F = \mathrm{id} \times f$.

Следствие IV.1.8. *Пусть* X *— гладкое проективное многообразие. Тогда в группе* $E^*(X)$ *выполнено соотношение:*

(IV.1.6)
$$\Delta_!(1)/[X] = 1.$$

Доказательство. Обозначим через $p\colon X \to \mathrm{pt}$ структурный морфизм и положим $P = \mathrm{id} \times p\colon X \times X \to X$ — отображение проекции. По теореме IV.1.7, имеем:

(IV.1.7)
$$\Delta_!(1)/[X] = \Delta_!(1)/p^!(1) = P_!(\Delta_!(1))/1 = 1.$$

□

Теперь основной результат легко выводится из утверждений IV.1.8 и IV.1.6.

Доказательство теоремы IV.1.3. Пусть $p_1, p_2 \colon X \times X \to X$ обозначают соответствующие проекции. Заметим что, для каждого элемента $\beta \in E^*(X \times X)$ выполнено соотношение $\Delta_!(1) \smile \beta = \beta \smile \Delta_!(1)$. (Элемент $\Delta_!(1)$ имеет степень 0, поскольку отображение $\Delta_!(1)$ сохраняет степени.)

Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{lcl} \Delta_!(1)/(\alpha \frown [X]) & \overset{\mathbf{AR.1}}{=} & (\Delta_!(1) \smile p_2^*(\alpha))/[X] \overset{\mathrm{IV.1.6.}\mathbf{b}}{=} (\Delta_!(1) \smile p_1^*(\alpha))/[X] \\ \quad (\mathrm{IV.1.8}) & = & (p_1^*(\alpha) \smile \Delta_!(1))/[X] \overset{\mathbf{AR.2}}{=} \alpha \smile (\Delta_!(1)/[X]) = \alpha. \end{array}$$

С другой стороны, используя IV.1.6.a, получим:

$$\begin{array}{lcl} (\Delta_!(1)/a) \frown [X] & \overset{\mathbf{AR.3}}{=} & p_*(\Delta_!(1) \frown (a \underline{\times} [X])) = p_*(\Delta_!(1) \frown ([X] \underline{\times} a)) \\ (\mathrm{IV.1.9}) & \overset{\mathbf{AR.3}}{=} & (\Delta_!(1)/[X]) \frown a = a. \end{array}$$

что и требовалось доказать[1]. □

Чтобы закончить доказательство теоремы IV.1.3 нам достаточно проверить формулы IV.1.3 и IV.1.5.

IV.2. Доказательство Первой формулы проекции

Определим $\mathfrak{V}$ как класс проективных морфизмов $f \colon Y \to X$ в рассматриваемой категории, для которых в группе $E_*(X)$ для

---

[1] Используемые здесь соотношения ассоциативности см. стр. 63.

произвольных элементов $\alpha \in E^*(Y)$ и $a \in E_*(X)$ выполнено соотношение:

$$f_*(\alpha \frown f^!(a)) = f_!(\alpha) \frown a. \tag{IV.2.1}$$

Очевидно, введенный класс замкнут относительно композиции.

Мы докажем теорему IV.1.5 в несколько этапов, последовательно устанавливая, что следующие классы морфизмов лежат в классе $\mathfrak{V}$.

- Нулевые сечения линейных расслоений: $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L})$;
- Замкнутые дивизориальные вложения $i\colon D \hookrightarrow X$;
- Нулевые сечения конечных сумм линейных расслоений:
  $$s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n);$$
- Нулевые сечения произвольных векторных расслоений: $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V})$;
- Замкнутые вложения $i\colon Y \hookrightarrow X$;
- Проекции $p\colon X \times \mathbb{P}^n \to X$;

Лемма IV.2.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение над гладким многообразием Y. Тогда его нулевое сечение $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L})$ принадлежит к $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Отображение s является сечением отображения проекции $p\colon \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L}) \to Y$. Пусть $\alpha \in E^*(Y)$ и $a \in E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L}))$. Желаемое соотношение следует из (II.3.3) и (II.3.2):

$$\begin{aligned} s_*(\alpha \frown s^!(a)) &= s_*(s^*p^*(\alpha) \frown s^!(a)) &&= p^*(\alpha) \frown s_*s^!(a) \\ &= p^*(\alpha) \frown (s_!(1) \frown a) &&= s_!(s^*p^*(\alpha)) \frown a = s_!(\alpha) \frown a. \end{aligned} \tag{IV.2.2}$$

□

Предложение IV.2.2. *Пусть* $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$, $i\colon Y \hookrightarrow X$ *— замкнутое вложение с нормальным расслоением* $\mathcal{N}$. *Если морфизм нулевого сечения* $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{N})$ *принадлежит к* $\mathfrak{V}$, *то и* i *принадлежит к* $\mathfrak{V}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму деформации к нормальному конусу (см. стр. 173). Легко видеть, что она имеет трансверсальные квадраты.

(IV.2.3)
$$\begin{tikzcd}
& B - Y \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "k_B"'] & \\
\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{N}) \arrow[r, hook, "k_0"'] \arrow[d, bend left, "p"] & B & X \arrow[l, hook', "k_1"] \\
Y \arrow[u, hook, "s"] \arrow[r, hook, "j_0"'] & Y \times \mathbb{A}^1 \arrow[u, hook, "t"'] & Y. \arrow[u, hook, "i"'] \arrow[l, hook', "j_1"]
\end{tikzcd}$$

Левый квадрат в диаграмме удовлетворяет условиям леммы B.5.

Во-первых, покажем, что морфизм t в диаграмме IV.2.3 принадлежит к классу $\mathfrak{V}$. Пусть $\alpha \in E^*(Y \times \mathbb{A}^1)$ и $a \in E_*(B)$. Используя лемму B.5 мы можем переписать a как $k_*^B(a_B) + k_*^0(a_0)$, где $a_0 \in E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{N}))$ и $a_B \in E_*(B - Y \times \mathbb{A}^1)$. Из точной последовательности Гизина получаем:

(IV.2.4) $$t^! k_*^B \; = \; 0 \quad \text{и}$$

(IV.2.5) $$k_B^* t_! \; = \; 0.$$

Следовательно, $t_*(\alpha \frown t^! k_*^B(a_B)) = 0$ и $t_!(\alpha) \frown k_*^B(a_B) = 0$. (Второе соотношение следует из IV.2.5: $t_!(\alpha) \frown k_*^B(a_B) = k_*^B(k_B^* t_!(\alpha) \frown a) = 0$.) Таким образом, имеем:

(IV.2.6) $$t_*(\alpha \frown t^!(a)) = t_*(\alpha \frown t^! k_*^0(a_0)).$$

Применяя лемму B.2 к левому квадрату диаграммы IV.2.3 и обозначая $j_0^*(\alpha)$ через α_0, получаем:

$$t_*(\alpha \frown t^! k_*^0(a_0)) = k_*^0 s_* \left(\alpha_0 \frown s^!(a_0)\right). \tag{IV.2.7}$$

Аналогично:

$$t_!(\alpha) \frown a = k_*^0 \left(s_!(\alpha_0) \frown a_0\right). \tag{IV.2.8}$$

Пусть выполнено соотношение $s_*(\alpha_0 \frown s^!(a_0)) = s_!(\alpha_0) \frown a_0$. Тогда, комбинируя его с равенствами IV.2.6, IV.2.7 и IV.2.8, получаем:

$$t_*(\alpha \frown t^!(a)) = t_!(\alpha) \frown a. \tag{IV.2.9}$$

Теперь переместимся на один шаг вправо в диаграмме IV.2.3 и покажем, что $i \in \mathfrak{V}$. Заметим, что k_*^1 — мономорфизм. Следовательно, достаточно проверить,что для всяких элементов $\alpha_1 \in E^*(Y)$ и $a_1 \in E_*(X)$ выполнено равенство:

$$k_*^1 i_*(\alpha_1 \frown i^!(a_1)) = k_*^1(i_!(\alpha_1) \frown a_1). \tag{IV.2.10}$$

Полагая: $\alpha = (j_1^*)^{-1}(\alpha_1) \in E^*(Y \times \mathbb{A}^1)$, $a = k_*^1(a_1) \in E_*(B)$, и применяя лемму B.2 к правому квадрату диаграммы IV.2.3, имеем: $k_*^1 i_*(\alpha_1 \frown i^!(a_1)) = t_*(\alpha \frown t^!(a))$. Аналогично: $k_*^1(i_!(\alpha_1) \frown a_1) = t_!(\alpha) \frown k_*^0(a_0) = t_!(\alpha) \frown a$. Комбинируя эти соотношения с IV.2.9, легко видеть, что $i \in \mathfrak{V}$. □

Следствие IV.2.3. *Для гладкого дивизора $i \colon D \hookrightarrow X$ морфизм i лежит в $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Немедленно следует из предложения IV.2.2 и леммы IV.2.1. □

Следствие IV.2.4. *Для произвольного n-мерного векторного расслоения $\mathcal{W} = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n$ на многообразии Y, расщепляющегося в прямую сумму линейных расслоений, соответствующий морфизм нулевого сечения $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{W})$ лежит в классе $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Применим следствие IV.2.3 к каждому шагу фильтрации

$$Y \overset{i_1}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{L}_1) \overset{i_2}{\hookrightarrow} \cdots \overset{i_n}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{W}), \tag{IV.2.11}$$

в которой морфизмы i_j являются нулевыми сечениями расслоений $\mathcal{L}_j$. □

Чтобы доказать желаемое утверждение для произвольных векторных расслоений, нам понадобится гомологический аналог принципа расщепления.

Рассмотрим векторное расслоение $\mathcal{V} \to Y$ ранга n над гладким неприводимым многообразием Y. Обозначим через $\mathcal{GL}_n$ соответствующее главное GL_n-расслоение над Y. Обозначим также диагональный тор через $T_n \subset GL_n$, а многообразие орбит $\mathcal{GL}_n/T_n$ через Y'. Морфизм проекции будем обозначать $p\colon Y' \to Y$. Наконец, пусть $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times_Y Y'$ обозначает индуцированное векторное расслоение на Y'.

Предложение IV.2.5. *Расслоение $\mathcal{V}'$ расщепляется в прямую сумму линейных расслоений и отображение $p_*\colon E_*(Y') \to E_*(Y)$ является универсальным расщепляющимся эпиморфизмом (т.е. для любой замены базы $Z \to Y$ индуцированное отображение $E_*(Z \times_Y Y') \to E_*(Z)$ — расщепляющийся эпиморфизм).*

Доказательство. Проекция $\mathcal{GL}_n \to Y'$ и наличие естественного действия T_n задает на $\mathcal{GL}_n$ структуру главного T_n-расслоения (principal bundle) над Y'. Более того, если $\mathcal{GL}'_n = \mathcal{GL}_n \times_Y Y'$ — замена базы $\mathcal{GL}_n$, существует естественный изоморфизм главных GL_n-расслоений

$$\mathcal{GL}_n \times_{T_n} GL_n \to \mathcal{GL}'_n \tag{IV.2.12}$$

над Y'. Расслоение $\mathcal{V}'$ на Y' в точности соответствует главному GL_n-расслоению $\mathcal{GL}'_n$. Таким образом, вышеупомянутый изоморфизм главных GL_n-расслоений над Y' показывает, что расслоение $\mathcal{V}'$ расщепляется в прямую сумму линейных расслоений (соответствующих, например, фундаментальным характерам $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ тора T_n). Тем самым, мы доказали первое утверждение предложения.

Рассмотрим Борелевскую подгруппу (Borel subgroup) B_n в GL_n (например, подгруппу верхне-треугольных матриц) и обозначим через U_n максимальную унипотентную подгруппу B_n (группу верхне-треугольных матриц с единицами на диагонали). Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{GL}_n / B_n$ (флаговое многообразие на Y ассоциированное с $\mathcal{V}$). Расслоение $\mathcal{F}$ естественно снабжено проекциями $q\colon \mathcal{F} \to Y$ и $r\colon Y' \to \mathcal{F}$, где проекция r индуцирована включением $T_n \subset B_n$. Используя естественное действие U_n на $\mathcal{GL}_n$, легко видеть, что существует башня морфизмов

$$\mathcal{GL}_n = S_m \to S_{m-1} \to \cdots \to S_1 = \mathcal{F}, \tag{IV.2.13}$$

имеющая главное $\mathbb{G}_a$-расслоение на каждом этаже (каждый этаж — торсор над тривиальным векторным расслоением ранга 1). Как следует из свойства строгой гомотопической инвариантности [**60**, 2.2.6], индуцированное отображение на гомологиях $r_*\colon E_*(Y') \to E_*(\mathcal{F})$ — изоморфизм.

Выше уже упоминалось, что $\mathcal{F}$ — полное расслоение флагов на Y, ассоциированное с расслоением $\mathcal{E}$. Таким образом, существует башня морфизмов

$$\mathcal{F} = Z_s \to Z_{s-1} \to \cdots \to Z_1 = Y, \tag{IV.2.14}$$

в которой каждый этаж является проективным расслоением, ассоциированным с векторным расслоением. По теореме о проективизированном расслоении (ТПР) B.4, на каждом этаже башни индуцируется расщепляющийся эпиморфизм в гомологиях.

Следовательно, отображение $q_*\colon E_*(\mathcal{F}) \to E_*(Y)$ также является расщепляющимся эпиморфизмом.

Тем самым, нами доказано, что отображение $p_*\colon E_*(Y') \to E_*(Y)$ — эпиморфизм.

Легко проверить, что все необходимые свойства морфизмов p, q и r инвариантны относительно замены базы. Следовательно, построенный расщепляющийся эпиморфизм универсален. ☐

Предложение IV.2.6. *Пусть $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V})$ — нулевое сечение конечно-мерного векторного расслоения $\mathcal{V}$. Тогда $s \in \mathfrak{V}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{V}'$ замену базы векторного расслоения $\mathcal{V}$ относительно морфизма $p\colon Y' \to Y$. Тогда, из предложения IV.2.5 видно, что расслоение $\mathcal{V}'$ расщепляется в прямую сумму линейных расслоений и индуцированное отображение

$$\bar{p}_*\colon E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V}')) \to E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V})) \tag{IV.2.15}$$

— эпиморфизм.

Пусть $s\colon Y \to \mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{V})$ и $\bar{s}\colon Y' \to \mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{V}')$ суть морфизмы, индуцированные нулевыми сечениями соответствующих векторных расслоений. В этом случае следующий квадрат трансверсален.

(IV.2.16)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{V}') \arrow[r, "\bar{p}"] & \mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{V}) \\
Y' \arrow[u, "\bar{s}"] \arrow[r, "p"] & Y \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

Пусть $\alpha \in E^*(Y)$ и $a \in E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{V}))$. Выбирая $b \in E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{V}'))$ так, что $a = \bar{p}_*(b)$ и применяя лемму B.2, получаем:

(IV.2.17)
$$s_*(\alpha \frown s^!(a)) = \bar{p}_*\bar{s}_*(p^*(\alpha) \frown \bar{s}^!(b))$$

и

(IV.2.18)
$$s_!(\alpha) \frown a = \bar{p}_*(\bar{s}_! p^*(\alpha) \frown b).$$

Выражения в правой части совпадают по предложению IV.2.4, что и доказывает желаемое утверждение. ☐

Следствие IV.2.7. *Произвольное замкнутое вложение $i\colon Y \hookrightarrow X$ лежит в классе $i \in \mathfrak{V}$.*

Доказательство. Применяя предложение IV.2.2, мы сводим рассуждение к случаю нулевого сечения $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{N})$ нормального расслоения $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{X/Y}$. Предложение IV.2.6 показывает, что морфизм s принадлежит к $\mathfrak{V}$, что и требовалось доказать. ☐

Для доказательства теоремы IV.1.5 нам осталось лишь рассмотреть случай морфизма проекции $p\colon X \times \mathbb{P}^* \to X$. Чтобы установить, что $p \in \mathfrak{V}$, нам нужны некоторые дополнительные результаты. (IV.2.9–IV.2.11).

Обозначение IV.2.8. Начиная с данного места, для проективного морфизма f мы будем обозначать отображения $f_*f^!$ через $f^\diamond$ и $f_!f^*$ через $f_\diamond$.

Лемма IV.2.9. (**a**) $\mathrm{id}^\diamond = \mathrm{id}$.

(**b**) *(дистрибутивность слева) Пусть a, b, c и p суть проективные морфизмы. Если $a^\diamond = b^\diamond + c^\diamond$, то $(pa)^\diamond = (pb)^\diamond + (pc)^\diamond$, полагая, что обе стороны равенства корректно определены.*

(**c**) *Для любого трансверсального квадрата с проективными морфизмами f и g*

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, dotted, "h"] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

выполнены соотношения: $h^\diamond = g^\diamond f^\diamond = f^\diamond g^\diamond$.

(**d**) *Для такого же квадрата имеем: $g_* F^\diamond = f^\diamond g_*$.*

(**e**) *Пусть s_i — стандартное вложение $\mathbb{P}^{n-i} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ и $p_n \colon X \times \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_X \to X$ — отображение проекции. Пусть также ψ_i имеет тот же смысл, что и в теореме о Проективизированном Расслоении (см. B.4). Тогда $p^n_* s_i^\diamond = \psi_i$.*

Доказательство. Пункты (**a**,**b**) очевидны из определения операции $\diamond$, а (**c**) и (**d**) — тривиальные следствия свойства трансверсальной замены базы, в то время, как (**e**) легко следует из (ТПР). □

Зафиксируем некоторое многообразие $X \in \mathbf{Sm/k}$ и рассмотрим n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^n_X$ над X. (До конца доказательства леммы IV.2.10 все схемы будут рассматриваться как объекты категории схем над базисной схемой X и все произведения будут неявно рассматриваться над X. В частности, $\mathbb{P}^n$ обозначает $\mathbb{P}^n_X$, а $\mathbb{P}^0$ заменяет X.) По ТПР, элемент $\Delta_!(1) \in E^*(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$ может быть представлен как

$$\Delta_!(1) = 1 \boxtimes \zeta^n + \zeta^n \boxtimes 1 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\zeta^i \boxtimes \zeta^j, \tag{IV.2.19}$$

где $\zeta = e(\mathcal{O}(1))$ — каноническая образующая $E^*(\mathbb{P}^n)$ как $E^*(X)$-алгебры и $a_{ij} \in E^*(X)$ (см. [**62**], лемма 1.9.3).

Это равенство, вместе с предыдущей леммой, дает нам следующее разложение тождественного оператора $\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$. Принимая во внимание соотношение $s_{ij}^{\diamond}(x) = (\zeta^i \boxtimes \zeta^j) \frown x$, где $s_{ij}\colon \mathbb{P}^{n-i} \times \mathbb{P}^{n-j} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ — стандартное вложение, мы можем переписать оператор $\frown$-произведения с $\Delta_!(1)$ в следующей форме:

$$\Delta^{\diamond} = (\Delta_!(1) \frown) = s_{0n}^{\diamond} + s_{n0}^{\diamond} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}s_{ij}^{\diamond}. \tag{IV.2.20}$$

Рассмотрим трансверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^{n-i} \times \mathbb{P}^{n-j} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "p_{1,n}s_{ij}"'] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-j} \arrow[d, "p_{1,n-j}"] \\
\mathbb{P}^{n-i} \arrow[r, hook, "s_i"'] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd} \tag{IV.2.21}$$

(здесь мы обозначаем через $p_{1,k}$ отображение проекции $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^n$). Применяя $p_{1,n}$ к (IV.2.20), по лемме IV.2.9.**a**,**b**, получаем следующее равенство:

$$\text{(IV.2.22)} \quad \mathrm{id} = (p_{1,n}\Delta)^\diamond = (p_{1,n}s_{0n})^\diamond + (p_{1,n}s_{n0})^\diamond + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(p_{1,n}s_{ij})^\diamond.$$

Вновь, по лемме IV.2.9.**c**, принимая во внимание, что $(p_{1,n}s_{0n})^\diamond = p^\diamond_{1,0}s^\diamond_0 = \mathrm{id}$, получаем:

$$\text{(IV.2.23)} \qquad 0 = p^\diamond_{1,n}s^\diamond_n + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p^\diamond_{1,n-j}s^\diamond_i.$$

Лемма IV.2.10. *Для морфизма проекции* $p_n\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^0$, *имеем:*
(a) $p^\diamond_n = -\sum_{j=1}^n a_{nj}p^\diamond_{n-j}$;
(b) $p^n_\diamond = -\sum_{j=1}^n a_{nj}p^{n-j}_\diamond$.

Доказательство. Проверим первое утверждение. Для $n = 0$ мы, очевидно, имеем $p^\diamond_0 = \mathrm{id}$. Применяя отображение p^n_* к (IV.2.23) и затем используя лемму IV.2.9.**d** для трансверсальных квадратов

$$\text{(IV.2.24)} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-j} \arrow[r] \arrow[d, "p_{1,n-j}"'] & \mathbb{P}^{n-j} \arrow[d, "p_{n-j}"] \\ \mathbb{P}^n \arrow[r, "p_n"'] & \mathbb{P}^0, \end{tikzcd}$$

имеем:

$$\text{(IV.2.25)} \qquad 0 = p^\diamond_n(p^n_* s^\diamond_n) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p^\diamond_{n-j}(p^n_* s^\diamond_i).$$

По IV.2.9.**e** $p^n_* s^\diamond_i = \psi_i$. Таким образом,

$$\text{(IV.2.26)} \qquad 0 = p^\diamond_n\psi_n + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}p^\diamond_{n-j}\psi_i.$$

По ТПР, для всякого $x \in E_*(X)$ мы можем выбрать элемент $\varphi(x) \in E_*(\mathbb{P}^n_X)$ такой, что $\psi_n(\varphi(x)) = x$ и $\psi_i(\varphi(x)) = 0$ для $i < n$. Применяя оператор (IV.2.26) к $\varphi(x)$, получаем:

$$0 = p_n^{\diamond} + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} p_{n-j}^{\diamond}. \tag{IV.2.27}$$

Доказательство случая (a) закончено. Когомологическое соотношение (b) может быть получено путем «дуализации» рассуждений, приведенных выше, или найдено в статье Панина (см. [**62**], раздел 1.10.) □

Предложение IV.2.11. *Пусть p_n обозначает, как и ранее, морфизм проекции $p_n \colon \mathbb{P}^n_X \to X$. Тогда, для всякого элемента $a \in E_*(X)$, имеем:*

$$p^n_*(p^!_n(a)) = p^n_!(1) \frown a.$$

Доказательство. Перепишем утверждение предложения в наших обозначениях. Мы должны проверить справедливость равенства $p_n^{\diamond}(a) = p^n_{\diamond}(1) \frown a$. Проведем доказательство индукцией по n. Случай $n = 0$ тривиален. Пусть наше предложение справедливо для всех целых неотрицательных чисел $n < N$. Тогда, для p_N, по лемме IV.2.10:

$$p_N^{\diamond}(a) = -\sum_{j=1}^{N} a_{Nj} p_{N-j}^{\diamond}(a) \tag{IV.2.28}$$

и

$$p^N_{\diamond}(1) \frown a = -\sum_{j=1}^{N} a_{Nj} p^{N-j}_{\diamond}(1) \frown a. \tag{IV.2.29}$$

По предположению индукции выражения в правых частях совпадают. Тем самым, доказан индукционный переход. ☐

Предложение IV.2.12. *Для произвольного неотрицательного целого числа n отображение проекции $p = p_n \colon \mathbb{P}^n_X \to X$ принадлежит к классу $\mathfrak{V}$.*

Доказательство. Для элементов $\alpha \in E^*(\mathbb{P}^n_X)$ и $a \in E_*(X)$ нам надо проверить, что

$$p_*(\alpha \frown p^!(a)) = p_!(\alpha) \frown a. \tag{IV.2.30}$$

Ясно, что обе части (IV.2.30) $E^*(X)$-линейны. Как следует из ТПР, $E^*(\mathbb{P}^n_X)$ как $E^*(X)$-модуль порожден элементами ζ^j. Таким образом, достаточно проверить утверждение предложения только для порождающих элементов. Следуя [**62**, лемма 1.9.1], мы имеем соотношение $\zeta^j = i^j_!(1)$ в $E^*(\mathbb{P}^n_X)$, где $i^j \colon \mathbb{P}^{n-j}_X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_X$ — стандартное вложение. Рассмотрим отображение проекции $p_j \colon \mathbb{P}^{n-j}_X \to X$. Поскольку $pi^j = p_j$, по следствию IV.2.7:

$$p_*(\zeta^j \frown p^!(a)) = p_* i^j_*(1 \frown i^!_j p^!(a)) = p^j_* p^!_j(a). \tag{IV.2.31}$$

Мы заканчиваем доказательство теоремы IV.1.5 с помощью предложения IV.2.11:

$$p^j_* p^!_j(a) = p^j_!(1) \frown a = p_! i^j_!(1) \frown a = p_!(\zeta^j) \frown a. \tag{IV.2.32}$$

☐

IV.3. Доказательство Второй Формулы Проекции

Стратегия доказательства теоремы IV.1.7 очень близка к использованной в предыдущем разделе. Вновь удобно ввести в рассмотрение класс $\mathfrak{W}$, состоящий из проективных морфизмов

$f\colon Y \to X$, таких, что для произвольных многообразия $W \in \mathbf{Sm/k}$ и элементов $\alpha \in E^*(W \times Y)$ и $a \in E_*(X)$ в группе $E^*(W)$ выполнено соотношение:

$$F_!(\alpha)/a = \alpha/f^!(a). \tag{IV.3.1}$$

(Здесь мы полагаем $F = \mathrm{id} \times f$. Подобные обозначения будут использованы и ниже.)

Покажем, что следующие классы морфизмов лежат в $\mathfrak{W}$:

- Нулевые сечения векторных расслоений: $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V})$;
- Замкнутые вложения $i\colon Y \hookrightarrow X$;
- Проекции $p\colon X \times \mathbb{P}^n \to X$.

Поскольку класс $\mathfrak{W}$ замкнут относительно композиции, мы получаем, что все проективные морфизмы в нашей категории лежат в классе $\mathfrak{W}$, что и доказывает теорему.

Лемма IV.3.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — векторное расслоение на гладком многообразии Y, а $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V})$ — нулевое сечение проекции $p\colon \mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V}) \to Y$. Тогда морфизм s принадлежит к классу $\mathfrak{W}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in E^*(W \times Y)$ и $a \in E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1} \oplus \mathcal{V}))$. Из функториальности /-произведения, соотношения **AR.1**, формулы (II.3.4) и теоремы IV.1.3, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha/s^!(a) &= \alpha/p_*(s_!(1) \frown a) = P^*(\alpha)/(s_!(1) \frown a) \\ &\overset{\mathbf{AR.1}}{=} \left(P^*(\alpha) \smile (1 \times s_!(1))\right)/a = \left(P^*(\alpha) \smile S_!(1)\right)/a = S_!(\alpha)/a. \end{aligned} \tag{IV.3.2}$$

(Здесь соотношение $1 \times s_!(1) = S_!(1)$ появляется из свойства замены базы, примененного к произведению с W.) □

Предложение IV.3.2. *Любое замкнутое вложение* $i\colon Y \hookrightarrow X$ *гладких многообразий лежит в классе* $\mathfrak{W}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{N})$ проективизацию, соответствующую нормальному расслоению $\mathcal{N}=\mathcal{N}_{X/Y}$. Рассмотрим соответствующий морфизм нулевого сечения $s\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{N})$.

Так же, как и в доказательстве теоремы IV.1.5, наши аргументы базируются на некоторой диаграмме деформации к нормальному конусу. Необходимая нам диаграмма получается из (IV.2.3) путем умножения на многообразие $W\in\mathbf{Sm/k}$. Для удобства, мы воспроизводим ее ниже.

(IV.3.3)

$$\begin{tikzcd}
 & W\times B - W\times Y\times\mathbb{A}^1 \arrow[d, "K_B"'] & \\
W\times\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{N}) \arrow[r, hook, "K_0"'] & W\times B & W\times X \arrow[l, hook', "K_1"] \\
W\times Y \arrow[u, hook, "S"] \arrow[r, hook, "J_0"'] & W\times Y\times\mathbb{A}^1 \arrow[u, hook, "I_t"] & W\times Y \arrow[u, hook, "I"] \arrow[l, hook', "J_1"]
\end{tikzcd}$$

Покажем, во-первых, что $I_t\in\mathfrak{W}$. Именно, мы должны проверить, что для произвольно выбранных элементов $\alpha\in E^*(W\times Y\times\mathbb{A}^1)$ и $a\in E_*(B)$ в группе $E^*(W)$ выполнено соотношение:

$$\alpha/i_t^!(a)=I_!^t(\alpha)/a. \tag{IV.3.4}$$

В точности так же, как и в доказательстве теоремы IV.1.5, пользуясь леммой B.5, мы можем переписать a как сумму $k_*^B(a_B)+k_*^0(a_0)$, где $a_0\in E_*(\mathbb{P}(\mathbf{1}\oplus\mathcal{N}))$ и $a_B\in E_*(B-Y\times\mathbb{A}^1)$ и получить равенства:

$$\alpha/i^!_t(a) = \alpha/i^!_t k^0_*(a_0) = \alpha_0/s^!(a_0), \tag{IV.3.5}$$

полагая $\alpha_0 = J^*_0(\alpha)$.

Аналогично, мы получаем соотношения:

$$I^t_!(\alpha)/a = S_! J^*_0(\alpha)/a_0 = S_!(\alpha_0)/a_0. \tag{IV.3.6}$$

По лемме IV.3.1 $\alpha_0/s^!(a_0) = S_!(\alpha_0)/a_0$, что доказывает (IV.3.4).

Поскольку отображение J^*_1 — изоморфизм, мы можем положить $\alpha = (J^*_1)^{-1}(\alpha_1) \in E^*(W \times Y \times \mathbb{A}^1)$ и $a = k^1_*(a_1) \in E_*(B)$. Применяя следствие B.2, получим:

$$\alpha_1/i^!(a_1) = J^*_1(\alpha)/i^!(a_1) = \alpha/i^!_t(a) \quad \text{и} \tag{IV.3.7}$$

$$I_!(\alpha_1)/a_1 = I_! J^*_1(\alpha)/a_1 = I^t_!(\alpha)/a. \tag{IV.3.8}$$

Полученные равенства, вместе с соотношением (IV.3.4), доказывают наше предложение. □

Предложение IV.3.3. *Пусть* $X, W \in \mathbf{Sm/k}$, $p\colon X \times \mathbb{P}^n \to X$ *— морфизм проекции, а* $P = \mathrm{id} \times p\colon W \times X \times \mathbb{P}^n \to W \times X$. *Тогда, для всяких элементов* $\alpha \in E^*(W \times X \times \mathbb{P}^n)$ *и* $a \in E_*(X)$, *в группе* $E^*(W)$ *выполнено соотношение:*

$$\alpha/p^!(a) = P_!(\alpha)/a. \tag{IV.3.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму с трансверсальным квадратом:

$$\begin{tikzcd}
X \times \mathbb{P}^n \arrow[dr, "p=p_0"'] & X \times \mathbb{P}^{n-r} \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "p_r"] & W \times X \times \mathbb{P}^{n-r} \arrow[l, "\bar{q}"'] \arrow[d, "P_r"] \\
 & X & W \times X \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd} \tag{IV.3.10}$$

Очевидно, обе стороны (IV.3.9) аддитивны. Следовательно, достаточно считать, что $\alpha = I_! P_r^*(\beta)$, где $\beta \in E^*(W \times X)$ и $0 \leq r < n$. Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha/p^!(a) &= I_! P_r^*(\beta)/p^!(a) = P_r^*(\beta)/i^! p^!(a) \\ &= P_r^*(\beta)/p_r^!(a) = \beta/p^r_* p_r^!(a). \end{aligned} \tag{IV.3.11}$$

Из предложения IV.2.11 и формулы **AR.1**:

$$\beta/p^r_* p_r^!(a) = \beta/(p^r_!(1_{X \times \mathbb{P}^{n-r}}) \frown a) = (\beta \smile q^* p^r_!(1))/a. \tag{IV.3.12}$$

Применяя к квадрату в последней диаграмме свойство замены базы, получаем желаемый результат:

(IV.3.13)

$$\beta \smile q^* p^r_!(1) = \beta \smile P^r_!(1) = P^r_! P_r^*(\beta) = P_!(I_! P_r^*(\beta)) = P_!(\alpha).$$

□

IV.4. Теорема двойственности Пуанкаре для мотивов.

Целью настоящего раздела является доказательство общей теоремы двойственности для мотивов. По сути, мы расширяем основное утверждение настоящей главы на эту категорию. Из полученного результата, в частности, следует теорема двойственности Воеводского–Фридландера [**22**] для случая произвольной характеристики основного поля. Пользуясь идеями Дольда–Пуппе (Dold–Puppe) [**3**] — их категорным подходом к феномену двойственности в топологии, мы приводим здесь простое и независимое от предыдущего изложения доказательство теоремы двойственности для категории мотивов.

IV.4.i. Аксиомы и примеры. Пусть нам дан ковариантный функтор $\mathbf{M}\colon \mathbf{Sm/k} \to \mathfrak{M}$ из категории гладких алгебраических многообразий над полем k в тензорную триангулированную категорию[2] $\mathfrak{M}$, переводящий произведение многообразий в тензорное произведение.

Для универсального конечного объекта $\mathrm{pt} = \operatorname{Spec} \mathrm{k}$ категории $\mathbf{Sm/k}$ обозначим через $\mathbb{Z}$ объект $M(\mathrm{pt}) \in \mathbf{Ob}\ \mathfrak{M}$. В дальнейшем, мы часто опускаем упоминание канонических изоморфизмов

$$\mathbb{Z} \otimes M(X) \simeq M(X) \simeq M(X) \otimes \mathbb{Z},$$

заданных отождествлениями $\mathrm{pt} \times X = X = X \times \mathrm{pt}$ в категории $\mathbf{Sm/k}$. Мы также предполагаем, что в категории $\mathfrak{M}$ зафиксирован обратимый объект $\mathbb{Z}(1)$, называемый объектом Тэйта. Будем обозначать произведения n сомножителей $\mathbb{Z}(1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}(1)$ через $\mathbb{Z}(n)$, а произведения вида $M \otimes \mathbb{Z}(n)$ — через $M(n)$.

Для многообразия X мы будем называть объект $M(X)$ категории $\mathfrak{M}$ *(ориентируемым) мотивом* X, а сам функтор $\mathbf{M}$ — *(ориентируемой) теорией мотивов на категории* $\mathbf{Sm/k}$, если выполнены нижеследующие аксиомы.

- **Аксиома сокращения.** Для всякого целого числа q и произвольных многообразий X и Y из $\mathbf{Sm/k}$ существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X), M(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X)(q), M(Y)(q)).$$

---

[2] В частности, мы предполагаем, что тензорная структура совместима с функтором сдвига, то есть $A[q] \otimes B = A \otimes B[q]$. Полный список аксиом тензорной триангулированной категории может быть найден в [**49, 50**].

- **Аксиома трансфера.** Для всякого проективного равноразмерностного морфизма $f\colon X \to Y$ коразмерности $d = \dim Y - \dim X$ задан морфизм мотивов
$$f^!\colon M(Y) \to M(X)(d)[2d]$$
функториальный относительно указанного класса морфизмов, то есть $f^!(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ и $(fg)^! = g^! f^!$.
- **Аксиома замены базы.** Для всякого трансверсального декартова квадрата:
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y, \end{tikzcd}$$
с проективными равноразмерностными морфизмами f и $\tilde{f}$, выполнено соотношение[3] : $\tilde{g}_* \tilde{f}^! = f^! g_*$ в категории $\mathfrak{M}$.
- **Аксиома согласованности.** Пусть $F\colon X \times Z \to Y \times Z$ обозначает морфизм $f \times \mathrm{id} \in \mathbf{MorSm/k}$ для некоторого морфизма многообразий $f\colon X \to Y$, для которого определен трансфер и произвольного многообразия Z. Тогда, для всяких таких морфизмов f, F в категории $\mathfrak{M}$ выполнено соотношение $F^! = f^! \otimes 1$.

Для заданной теории мотивов $\mathbf{M}$ определим группы гомологий и когомологий следующим образом. Положим:

$$\mathbb{HM}^{nm}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X), \mathbb{Z}(m)[n])$$

---

[3] Здесь и далее через g_* *et cetera* обозначается морфизм, полученный из индуцированного морфизма $M(g)$ в категории $\mathfrak{M}$ после применения необходимых операций сдвига и скручивания с объектом Тэйта.

и

$$\mathrm{HM}_{nm}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{Z}(m)[n], M(X)).$$

Наиболее важным для нас примером вышеприведенной конструкции являются мотивы Воеводского.

Пример IV.4.1. Положим $\mathfrak{M} = \mathbf{DM}^{-}(\mathbf{k})$ и функтор $\mathbf{M}$ совпадает с соответствующим функтором мотивов из [**75, 86**]. Тогда $\mathbf{M}$ оказывается функтором с трансферами для проективных морфизмов и выполнены соответствующие аксиомы. Проверка аксиомы сокращения в этом случае проделана в работе [**89**]. Конструкция трансфера и остальные аксиомы принадлежат к числу базисных свойств мотивов Воеводского (см. например [**75**, Раздел 4]).

Пример IV.4.2. Заменяя, в наших определениях, категорию $\mathbf{Sm/k}$ категорией гладких топологических многообразий и беря в качестве $\mathfrak{M}$ производную категорию категории $\mathbb{Z}/2$-модулей, мы получим, как можно показать, обычные группы сингулярных (ко-)гомологий с $\mathbb{Z}/2$-коэффициентами. Для согласования индексов нам достаточно положить $M(i)[j] := M[j-i]$, где справа подразумевается обычный сдвиг в триангулированной категории, или просто переписать все наши выкладки с одним индексом. Класс проективных морфизмов в этом случае следует заменить собственными дифференцируемыми отображениями. Конструкция трансфера может быть найдена в любом учебнике по алгебраической топологии (см., например, [**10**]). Прямая проверка показывает, что все вышеприведенные аксиомы выполняются и в рассматриваемом случае. В результате, мы получаем доказательство классической теоремы двойственности Пуанкаре в духе работы Дольда–Пуппе [**3**].

IV.4.ii. Утверждения и доказательства. Целью настоящего параграфа является доказательство теоремы двойственности для ориентируемых мотивов. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема IV.4.3. *Для всякой ориентируемой теории мотивов* $\mathbf{M}$ *и многообразий* $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$*, где* X *— проективное равноразмерностное, существует канонический изоморфизм абелевых групп:*

$$\mathrm{Hom}(M(Y)(i)[j], M(X)) \simeq \mathrm{Hom}(M(Y) \otimes M(X), \mathbb{Z}(d-i)[2d-j]),$$

контравариантный по Y*. Здесь* d *— размерность* X*.*

Как простое следствие нашей теоремы, мы получим следующий классический вариант двойственности Пуанкаре:

Следствие IV.4.4. *Для произвольного гладкого проективного равноразмерностного многообразия* X *размерности* d *существует канонический изоморфизм:*

$$\mathbb{HM}_{*,*}(X) \simeq \mathbb{HM}^{2d-*,d-*}(X).$$

Доказательство. Положим в утверждении теоремы $Y = \mathrm{pt}$.

$\square$

В следующем абзаце мы предполагаем, что рассматриваемая категория $\mathfrak{M}$ допускает внутренние $\underline{Hom}$-объекты, точнее, что для всякого многообразия $X \in \mathbf{Sm/k}$ функтор тензорного произведения $M(X) \otimes - \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ имеет правый сопряженный.

Для многообразия X, удовлетворяющего условиям следствия IV.4.4 рассмотрим каноническое отображение — *мотивный кофундаментальный класс* (см. подробности ниже):

$$M(X)\otimes M(X) = M(X\times X)\xrightarrow{\Delta^!} M(X)(d)[2d]\xrightarrow{p_*}\mathbb{Z}(d)[2d].$$

Это отображение задает канонический морфизм двойственности: $M(X)\to \underline{Hom}(M(X),\mathbb{Z}(d)[2d])$. Выполнено следующее утверждение.

Следствие IV.4.5. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— теория мотивов, рассмотренная в примере IV.4.1. Тогда, для всякого гладкого проективного равноразмерностного многообразия* X*, построенный морфизм двойственности:*

$$\psi\colon M(X)\to \underline{Hom}(M(X),\mathbb{Z}(d)[2d])$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним морфизм ψ до выделенного треугольника в категории $\mathfrak{M}$ и обозначим третью вершину треугольника через $\mathrm{Cone}(\psi)$. Как следует из теоремы IV.4.3, для всякого мотива гладкого неприводимого многообразия Y и произвольных целых чисел p,q выполнено равенство $\mathrm{Hom}(M(Y)(p)[q],\mathrm{Cone}(\psi))=0$. Поскольку такие мотивы являются множеством образующих категории $\mathfrak{M}$, мы видим, что объект $\mathrm{Cone}(\psi)$ изоморфен нулевому объекту. Из аксиом триангулированной категории легко следует, что морфизм с нулевым конусом есть изоморфизмом. ☐

Доказательство теоремы IV.4.3. Чтобы построить упомянутые в теореме изоморфизмы, нам понадобятся следующие ингредиенты.

Прежде всего, обозначим через $1 \in \mathrm{HM}^{0,0}(\mathrm{pt}) = \mathrm{HM}_{0,0}(\mathrm{pt})$ элемент группы (ко-)гомологий точки, соответствующий тождественному отображению $\mathrm{id}\colon \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$. Заметим, что для морфизма многообразий $f\colon X \to Y$ морфизм $M(f)$ индуцирует естественные отображения $f_*\colon \mathrm{HM}_{*,*}(X) \to \mathrm{HM}_{*,*}(Y)$ на мотивных гомологиях и $f^*\colon \mathrm{HM}^{*,*}(Y) \to \mathrm{HM}^{*,*}(X)$ — на когомологиях, соответственно. В том случае, когда f проективен, коразмерности d, отображение трансфера $f^!$ на мотивах индуцирует соответствующие трансферы

$$f_!\colon \mathrm{HM}^{*,*}(X) \to \mathrm{HM}^{*+2d,*+d}(Y) \text{ и } f^!\colon \mathrm{HM}_{*,*}(Y) \to \mathrm{HM}_{*-2d,*-d}(X)$$

на (ко-)гомологиях. Для многообразия X размерности d рассмотрим морфизмы диагонали и проекции:

$$X \times X \xleftarrow{\Delta} X \xrightarrow{p} \mathrm{pt}$$

и назовем элементы

$$[X]_* = \Delta_* p^!(1) \in \mathrm{HM}_{2d,d}(X \times X)$$

и

$$[X]^* = \Delta_! p^*(1) \in \mathrm{HM}^{2d,d}(X \times X),$$

соответственно, *мотивными фундаментальным и кофундаментальным классами многообразия* X. (Ср. с определением IV.1.1 выше.) Определим, также, косые произведения

$$/\colon \mathrm{HM}^{i,j}(X \times Y) \otimes \mathrm{HM}_{m,n}(Y) \to \mathrm{HM}^{i-m,j-n}(X)$$

и

$$\backslash\colon \mathrm{HM}_{m,n}(X \times Y) \otimes \mathrm{HM}^{i,j}(Y) \to \mathrm{HM}_{m-i,n-j}(X)$$

следующим образом. Для элементов $\alpha \in \mathbb{HM}^{i,j}(X \times Y)$ и $a \in \mathbb{HM}_{m,n}(Y)$ положим:

$$\alpha/a : M(X)(m) = M(X)\otimes\mathbb{Z}(m) \overset{1\otimes a}{\to} M(X)\otimes M(Y)[-n] \overset{\alpha}{\to} \mathbb{Z}(i)[j-n]$$

для первого произведения и симметрично:

$$\beta\backslash b : \mathbb{Z}(m)[n-j] \overset{b}{\to} M(X)\otimes M(Y)[-j] \overset{1\otimes\beta}{\to} M(X)\otimes\mathbb{Z}(i) = M(X)(i)$$

— для второго, полагая $b \in \mathbb{HM}_{m,n}(X \times Y)$ и $\beta \in \mathbb{HM}^{i,j}(Y)$. (Здесь и далее мы неявно используем аксиому сокращения.) Зададим, теперь, гомоморфизмы двойственности Пуанкаре для случая следствия IV.4.4, полагая:

$$\mathcal{D}_\bullet(-) = [X]^*/-\colon \mathbb{HM}_{*,*}(X) \to \mathbb{HM}^{2d-*,d-*}(X)$$

и

$$\mathcal{D}^\bullet(-) = -\backslash[X]_*\colon \mathbb{HM}^{*,*}(X) \to \mathbb{HM}_{2d-*,d-*}(X),$$

в точности следуя формулировкам IV.1.1 и IV.1.2.

Естественное обобщение этих гомоморфизмов на общий случай, возникающий в условиях теоремы, следующее. Обозначим, для краткости, мотив $M(Y)(i)[j]$ через $\mathcal{Y}$, а сдвиг на $(d)[2d]$ через $\{d\}$. Построим отображение

$$\mathcal{D}_\bullet\colon \operatorname{Hom}(\mathcal{Y},-) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}\otimes -, \mathbb{Z}\{d\}),$$

полагая, что для заданного морфизма $a \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}, M(X))$ морфизм $D_\bullet(a)$ определяется формулой:

$$\mathcal{Y}\otimes M(X) \overset{a\otimes 1}{\to} M(X)\otimes M(X) \overset{\Delta^!}{\to} M(X)\{d\} \overset{p_*}{\to} \mathbb{Z}\{d\}.$$

Обратное отображение

$$\mathcal{D}^\bullet\colon \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}\otimes -, \mathbb{Z}\{d\}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{Y},-)$$

задается для морфизма $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{Y} \otimes M(X), \mathbb{Z}\{d\})$ отображением:

$$\mathcal{Y} \overset{1\otimes p^!}{\to} \mathcal{Y} \otimes M(X)\{-d\} \overset{1\otimes\Delta_*}{\to} \mathcal{Y} \otimes M(X) \otimes M(X)\{-d\} \overset{\alpha\otimes 1}{\to} \mathbb{Z} \otimes M(X).$$

Контравариантная функториальность построенных отображений по переменной $\mathcal{Y}$ очевидна из конструкции. Теорема IV.4.3 следует теперь из аксиомы сокращения и коммутативности следующих диаграмм[4]:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \otimes \mathbb{Z} \otimes M(X) \arrow[d, "1\otimes p^!\otimes 1"'] \arrow[dr, equal, "1"] & & \\
\mathcal{Y} \otimes M(X)^{\otimes 2}\{-d\} \arrow[r, "1\otimes\Delta^!"] \arrow[d, "\Delta^3_*"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & \mathcal{Y} \otimes M(X) \arrow[d, "\Delta_*"'] \arrow[dr, equal, "1"] & \\
\mathcal{Y} \otimes M(X)^{\otimes 3}\{-d\} \arrow[r, "1\otimes 1\otimes\Delta^!"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1\otimes 1"'] & \mathcal{Y} \otimes M(X)^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes 1\otimes p_*"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1"'] & \mathcal{Y} \otimes M(X) \arrow[d, "\alpha"'] \\
\mathbb{Z} \otimes M(X)^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes\Delta^!"] & \mathbb{Z} \otimes M(X)\{d\} \arrow[r, "1\otimes p_*"] & \mathbb{Z}\{d\}
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p^!"'] & M(X) \otimes \mathbb{Z} \arrow[d, "1\otimes p^!"'] \arrow[dr, equal, "1"] & & \\
\mathcal{Y} \otimes M(X)\{-d\} \arrow[r, "a\otimes 1"] \arrow[d, "\Delta_*"'] & M(X)^{\otimes 2}\{-d\} \arrow[r, "\Delta^!"] \arrow[d, "\Delta^2_*"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & M(X) \arrow[d, "\Delta_*"'] \arrow[dr, equal, "1"] & \\
\mathcal{Y} \otimes M(X)^{\otimes 2}\{-d\} \arrow[r, "a\otimes 1\otimes 1"] & M(X)^{\otimes 3}\{-d\} \arrow[r, "\Delta^!\otimes 1"] & M(X)^{\otimes 2} \arrow[r, "p_*"] & M(X).
\end{tikzcd}$$

---

[4] В последующих диаграммах $M(X)^{\otimes n}$ обозначает n-кратное тензорное произведение, а Δ^i — морфизм диагонали, примененный к i-ому сомножителю.

Поскольку квадраты, помеченные в обеих диаграммах знаками ■, отвечают трансверсальному декартову квадрату многообразий

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[d, "\mathrm{id}\times\Delta^2"'] & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, "\Delta"] \\
X \times X \times X & X \times X, \arrow[l, "\Delta^1\times\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

они коммутативны по аксиомам замены базы и согласованности.

□

В заключение, отметим, что отображение трансфера на (ко-)гомологиях однозначно восстанавливается по зафиксированным отображениям двойственности Пуанкаре, как происходит и в классическом топологическом случае (ср. также IV.1.4). Именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение IV.4.6. *Для проективных равноразмерностных многообразий $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$ и морфизма $f\colon X \to Y$, выполнены равенства:*

$$f_! = \mathcal{D}^Y_\bullet f_* \mathcal{D}^\bullet_X \qquad \textit{и} \qquad f^! = \mathcal{D}^\bullet_X f^* \mathcal{D}^Y_\bullet .$$

Здесь $\mathcal{D}^X_\bullet$ и $\mathcal{D}^Y_\bullet$ обозначают отображения двойственности Пуанкаре из следствия IV.4.4, построенные для многообразий X и Y, соответственно.

Доказательство. Первое равенство легко следует из соотношения $f_*(\alpha\backslash[X]_*) = f_!(\alpha)\backslash[Y]_*$, которое, в свою очередь, вытекает из коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & & M(X)\otimes M(X) \arrow[r, "\alpha\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes f_*"] & \mathbb{Z}\otimes M(X) \arrow[d, "1\otimes f_*"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "p_X^!"] \arrow[dr, "p_Y^!"'] & M(X) \arrow[ur, "\Delta_*^X"] \arrow[r, "\Gamma_*^f"'] & M(X)\otimes M(Y) \arrow[r, "\alpha\otimes 1"] & \mathbb{Z}\otimes M(Y) \\
 & M(Y) \arrow[u, "f^!"] \arrow[r, "\Delta_*^Y"'] \arrow[ur, phantom, "\blacksquare"] & M(Y)\otimes M(Y). \arrow[u, "f^!\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

(Обозначения сдвигов здесь, для простоты, опущены.) Отмеченный знаком ■ квадрат соответствует трансверсальной диаграмме графика морфизма f:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Gamma^f"] \arrow[d, "f"'] & X\times Y \arrow[d, "f\times\mathrm{id}"] \\
Y \arrow[r, "\Delta^Y"'] & Y\times Y,
\end{tikzcd}$$

коммутативность остальной части диаграммы проверяется тривиально. Второе равенство может быть получено аналогично. $\square$

Приложение

A. Вспомогательные геометрические конструкции

Настоящий раздел посвящен описанию некоторых геометрических конструкций, используемых в диссертации. Определим, во-первых, трансверсальные квадраты, следуя работе А.С.Меркурьева [**51**].

Определение A.1. Назовем квадрат

(A.1)
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

в категории **Sm/k** трансверсальным, если выполнены следующие условия:

(**a**) Этот квадрат декартов в категории **Sch/k**;

(**b**) следующая последовательность касательных расслоений над Y' точна:
$$0 \to \mathcal{T}_{Y'} \overset{d\bar{g}\oplus d\bar{f}}{\longrightarrow} \bar{g}^*\mathcal{T}_Y \oplus \bar{f}^*\mathcal{T}_{X'} \overset{dg-df}{\longrightarrow} \bar{g}^*f^*\mathcal{T}_X \to 0.$$

Несложно проверить, что это определение согласуется с данными в работах [**62, 64**]. Нам понадобится следующее свойство трансверсальных квадратов.

Предложение A.2. *Если морфизм f — замкнутое вложение, то условие (*b*) влечет изоморфизм: $\bar{g}^*\mathcal{N}_{X/Y} \simeq \mathcal{N}_{X'/Y'}$.*

Доказательство. Короткая точная последовательность из (**b**) может быть рассмотрена как тотальный комплекс следующего бикомплекса:

(A.2)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{g}^*\mathcal{T}_Y \arrow[r, "-df"] & \bar{g}^* f^*\mathcal{T}_X \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}_{Y'} \arrow[r, "d\bar{f}"'] \arrow[u, "d\bar{g}"] & \bar{f}^*\mathcal{T}_{X'}. \arrow[u, "dg"']
\end{tikzcd}$$

Поскольку последовательность (**b**) точна, этот бикомплекс ацикличен. С другой стороны, он квазиизоморфен двучленному комплексу $\bar{g}^*\mathcal{N}_{X/Y} \leftarrow \mathcal{N}_{X'/Y'}$. □

Пример A.3. Плоскость морфизма f в диаграмме A.1 влечет трансверсальность квадрата. (См., например, [**23**, приложение B.7.4.])

Пример A.4. Пусть

(A.3)
$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{y_i/x} y_i \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "f"] \\
x \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

— декартов квадрат, такой, что $f\colon Y \to X$ — морфизм кривых, этальный над точкой x. Тогда этот квадрат трансверсальный.

Пример A.5. Предположим, что в расслоенной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
X & X' \arrow[l] \arrow[d] & X'' \arrow[l] \arrow[d] \\
Y \arrow[from=u] & Y' \arrow[l] & Y'' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

два из трех квадратов $(XX'Y'Y, XX''Y''Y, X'X''Y''Y')$ трансверсальны. Тогда трансверсален и третий квадрат.

В тексте диссертации нами также активно используется понятие деформации к нормальному конусу. Данное понятие заменяет в алгебро-геометрическом случае понятие трубчатой окрестности в топологии. Мы приводим здесь его определение, следуя, в основном, изложению книги Фултона [**23**] и работы [**61**]. Рассмотрим алгебраическое многообразие $X \in \mathbf{Sm/k}$ и замкнутое гладкое подмногообразие Y в нем. Обозначим через $B'(X,Y)$ раздутие $X \times \mathbb{A}^1$ в подмногообразии $Y \times \{0\}$. Положим, далее, $B(X,Y) = B'(X,Y) - \tilde{X}$, где $\tilde{X}$ — собственный прообраз (strict transform) подмногообразия $X \times \{0\}$ в соответствии с морфизмом раздутия. Полученная схема $B(X,Y)$ обладает следующими, важными для нас свойствами:

a) Задана каноническая проекция $p\colon B(X,Y) \to \mathbb{A}^1$;
b) Задано вложение $i\colon Y \times \mathbb{A}^1 \to B(X,Y)$, композиция pi совпадает с морфизмом проекции $Y \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$;
c) Слой отображения p над точкой 1 канонически изоморфен X и замена базы отображения i в соответствии с вложением $\{1\} \to \mathbb{A}^1$ оказывается исходным вложением $Y \hookrightarrow X$;
d) Слой отображения p над точкой 0 канонически изоморфен $\mathcal{N}_{X/Y}$ — нормальному расслоению к Y в X, а замена базы отображения i в соответствии с вложением $\{0\} \to \mathbb{A}^1$ совпадает с вложением нулевого сечения $z\colon Y \hookrightarrow \mathcal{N}_{X/Y}$.

Сформулированные свойства позволяют нам выписать следующую диаграмму морфизмов пар многообразий.

$$(\mathcal{N}_{X/Y}, \mathcal{N}_{X/Y} - z(Y)) \hookrightarrow (B(X,Y), B(X,Y) - Y \times \mathbb{A}^1) \hookleftarrow (X, X - Y), \tag{A.4}$$

индуцированную вложениями в аффинную прямую $\mathbb{A}^1$ точек 0 и 1, соответственно. Для нас основным утверждением про вышеприведенную конструкцию является для нас следующее:

Предложение A.6. *Для всякой теории когомологий E диаграмма A.4 индуцирует изоморфизмы групп когомологий*

$$E_Y(\mathcal{N}_{X/Y}) \simeq E_{Y\times\mathbb{A}^1}(B(X,Y)) \simeq E_Y(X).$$

Доказательство этого утверждения может быть найдено, например, в [**56**, 3.2.4] *и* [**61**, 2.2.6].

B. Некоторые свойства трансфера

В настоящем дополнении мы сформулируем и частично докажем некоторые, наиболее важные свойства отображения трансфера, используемые при доказательстве двойственности Пуанкаре. Несмотря на то, что мы должны работать как с гомологиями, так и с когомологиямн. мы уделим внимание, прежде всего, гомологиям, поскольку ранее гомологический случай вообще не рассматривался. Когомологические варианты соответствующих утверждений естественным образом «двойственны», большинство из них встречается в тексте диссертации или может быть найдено в работе Панина [**62**]. Все опущенные ниже доказательства утверждений о гомологиях могут быть найдены в работе [**65**].

Свойство B.1. *Для всякого трансверсального квадрата*

(B.1)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] & X \\ Y' \arrow[u, "\bar{f}"] \arrow[r, "\bar{g}"'] & Y \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

в котором морфизм f проективен, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
E_*(X') \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\bar{f}^!"'] & E_*(X) \arrow[d, "f^!"] \\
E_*(Y') \arrow[r, "\bar{g}_*"'] & E_*(Y).
\end{tikzcd}$$

Следствие B.2. *В условиях свойства B.1 пусть $\alpha \in E^*(Y)$ и $a \in E_*(X')$. Тогда выполнены следующие соотношения:*

(i) $f_*(\alpha \frown f^! g_*(a)) = g_* \bar{f}_*(\bar{g}^*(\alpha) \frown \bar{f}^!(a))$

(ii) $f_!(\alpha) \frown g_*(a) = g_*(\bar{f}_! \bar{g}^*(\alpha) \frown a)$

Более того, для многообразия $W \in \mathbf{Sm/k}$ и $\beta \in E^*(W \times Y)$, имеем:

(iii) $\beta / f^! g_*(a) = \bar{G}^*(\beta) / \bar{f}^!(a)$

(iv) $F_!(\beta)/g_*(a) = \bar{F}_! \bar{G}^*(\beta)/a.$

Доказательство. Все эти соотношения легко получаются, используя свойство трансверсальной замены базы. Мы проиллюстрируем общий принцип, доказав первое из них:

$$\begin{aligned}
f_*(\alpha \frown f^! g_*(a)) &= f_*(\alpha \frown \bar{g}_* \bar{f}^!(a)) = f_* \bar{g}_*(\bar{g}^*(\alpha) \frown \bar{f}^!(a)) \\
&= g_* \bar{f}_*(\bar{g}^*(\alpha) \frown \bar{f}^!(a)).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

□

Сформулируем, теперь, гомологические варианты точной последовательности Гизина и теоремы о Проективизированном Расслоении (ТПР).

Свойство B.3 (Точная последовательность Гизина). *Пусть: $i\colon Y \hookrightarrow X$ – замкнутое вложение и $j\colon X - Y \hookrightarrow X$ – открытое* *вложение дополнения. Тогда, последовательность* $E_*(X-Y) \xrightarrow{j_*} E_*(X) \xrightarrow{i^!} E_*(Y)$ *точна.*

Перед тем, как сформулировать следующее утверждение, напомним определение класса Эйлера. Для линейного расслоения $\mathcal{L}$ над X мы определяем класс Эйлера $e(\mathcal{L})$ как $z^* z_!(1)$, где $z\colon X \to \mathcal{L}$ — нулевое сечение расслоения (подробнее, см. [**62**, 1.1.4]).

Свойство B.4 (ТПР (Гомологическая))**.** *Для* $X \in \mathbf{Sm/k}$ *и векторного расслоения* $\mathcal{V} \xrightarrow{p} X$ *ранга* r *положим:* $\zeta = e(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(1)) \in E^*(\mathbb{P}(\mathcal{V}))$. *Тогда отображение*

$$\oplus_{i=0}^{r-1}\psi_i\colon E_*(\mathbb{P}(\mathcal{V})) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=0}^{r-1} E_*(X),$$

где $\psi_i = p_* \circ (\zeta^{\smile i} \frown -)$, *является изоморфизмом.*

Следующая лемма представляет из себя «дуализацию» леммы 1.4.2 [**62**].

Лемма B.5 (Гомологическая полезная лемма). *Рассмотрим следующую диаграмму с трансверсальным квадратом:*

$$\begin{tikzcd}
 & X - Y \arrow[d, "k^1"'] \\
V \arrow[r, "k^0"'] \arrow[d, bend left, "p"] & X \\
W \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"'] & Y. \arrow[u, hook, "q"]
\end{tikzcd}$$

Предположим также, что морфизм p *проективен,* q *— замкнутое вложение, а* $X - Y$ *— открытое дополнение к* Y *в* X. *Далее, предположим, что* k_1 *— соответствующее открытое вложение,*

$pi = \mathrm{id}$*, и морфизм* j *индуцирует изоморфизм на гомологиях. Тогда* $\operatorname{Im} k^0_* + \operatorname{Im} k^1_* = E_*(X)$.

Доказательство. Пусть $x \in E_*(X)$. Поскольку отображение j_* — изоморфизм и $i^! p^! = \mathrm{id}$, мы можем, используя свойство трансверсальной замены базы, поднять x до $\bar{x} = p^!(j_*)^{-1} q^!(x) \in E_*(V)$ такого, что $q^! k^0_*(\bar{x}) = q^!(x)$. Точная последовательность Гизина влечет: $k^0_*(\bar{x}) - x \in \operatorname{Im} k^1_*$, что и требовалось доказать. $\square$

Список цитируемой литературы

[1] Бейлинсон А.А. Высшие регуляторы и значения L-функций. *Современные проблемы математики, т. 24*, Итоги Науки и Техники, стр. 181–238. АН СССCР, ВИНиТИ, Москва, 1984.

[2] Гельфанд С.И.; Манин Ю.И. *Методы гомологической алгебры. Том 1.* “Наука”, Москва, 1988.

[3] Дольд Д.; Пуппе А. Двойственность, след и трансфер. *Труды Мат. Инст. им Стеклова.*, 154:81–97, 1983.

[4] Манин Ю.И. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования. Матем. Сб., 1968, 77(119):4, 475–507. 1968.

[5] Нестеренко Ю.П.; Суслин А.А. Гомологии общей линейной группы над локальным кольцом и K-теория Милнора. *Изв. АН СССР Сер. Мат.*, 53(1):121–146, 1989.

[6] Панин И.А.; Реманн У. Вариант теоремы Спрингера. *Алгебра и Анализ*, 19(6):117–125, 2007.

[7] Пименов К.И. Ориентации в теориях гомологий. *Алгебра и Анализ*, 19(5):179–213, 2007.

[8] Ройтман А.А. Г-эквивалентность нульмерных циклов. *Мат. Сб.*, 86 (128):557–570, 1971.

[9] Суслин А.А. K_3 от поля и группа Блоха. *Труды Мат. Инст. им Стеклова.*, 183:180–199, 229, 1990.

[10] Фоменко А.Т.; Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии.* «Наука», Москва, 1989.

[11] Adams J. F. *Stable homotopy and generalised homology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1995.

[12] Arason J.Kr. Der Wittring projektiver Räume. *Math. Ann.*, 253(3):205–212, 1980.

[13] Balmer P. Triangular Witt groups. II. From usual to derived. *Math. Z.*, 236(2):351–382, 2001.

[14] Becker J. C.; Gottlieb D. H. The transfer map and fiber bundles. *Topology*, 14:1–12, 1975.

[15] Beĭlinson A.; MacPherson, R.; Schechtman V. Notes on motivic cohomology. *Duke Math. J.*, 54(2):679–710, 1987.

[16] Bloch S.; Lichtenbaum S. A spectral sequence for motivic cohomology. `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0062/` (препринт) 1995.

[17] Colliot-Thélène J.-L.; Hoobler R.T.; Kahn B. The Bloch-Ogus-Gabber theorem. In *Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996)*, volume 16 of *Fields Inst. Commun.*, pages 31–94. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[18] Conner P. E.; Floyd E. E. *The relation of cobordism to K-theories.* Lecture Notes in Mathematics, No. 28. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[19] Deligne P. *Cohomologie étale.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier.

[20] Deligne P. La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43):273–307, 1974.

[21] Deligne P. La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (52):137–252, 1980.

[22] Friedlander E.; Voevodsky V. Bivariant cycle cohomology. В книге [**91**] стр. 138–187.

[23] Fulton W. *Intersection theory* Springer-Verlag, Berlin, 2^{nd} ed., 1998.

[24] Gabber O. K-theory of Henselian local rings and Henselian pairs. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 of *Contemp. Math.*, pages 59–70. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[25] Gillet H.A.; Thomason R.W. The K-theory of strict Hensel local rings and a theorem of Suslin. In *Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983)*, volume 34, pages 241–254, 1984.

[26] Goncharov A.B. Polylogarithms, regulators, and Arakelov motivic complexes. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(1):1–60 (electronic), 2005.

[27] Goncharov A.B.; Zhao J. Grassmannian trilogarithms. *Compositio Math.*, 127(1):83–108, 2001.

[28] Grothendieck A. La théorie des classes de Chern. *Bull. Soc. Math. France*, 86:137–154, 1958.

[29] Grothendieck A.; Verdier J.L. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat M. Artin, ред. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3.* LNM, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).

[30] Hartshorne R. *Residues and duality.* Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. LNM No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[31] Hartshorne R. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. GTM No. 52.

[32] Hirzebruch F. *Topological methods in algebraic geometry.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[33] Hornbostel J. A^1-representability of Hermitian K-theory and Witt groups. *Topology*, 44(3):661–687, 2005.

[34] Hornbostel J.; Yagunov S. Rigidity for Henselian local rings and $\mathbb{A}^1$-representable theories. *Math. Z.*, 255(2):437–449, 2007.

[35] Hovey M.; Shipley B.; Smith J. Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(1):149–208, 2000.

[36] Hu P. S-modules in the category of schemes. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 161(767):viii+125, 2003.

[37] Izhboldin O.T. Fields of u-invariant 9. *Ann. of Math. (2)*, 154(3):529–587, 2001.

[38] Jannsen U. Rigidity results on k-cohomology and other functors. `http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Jannsen` (препринт).

[39] Jannsen U.; Kleiman S.; Serre J.-P. ред. *Motives*, volume 55 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Providence, RI, 1994. American Mathematical Society.

[40] Jardine J.F. Simplicial objects in a Grothendieck topos. In *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*, volume 55 of *Contemp. Math.*, pages 193–239. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[41] Jardine J.F. Motivic symmetric spectra. *Doc. Math.*, 5:445–553 (electronic), 2000.

[42] Jardine J.F. A rigidity theorem for l-theory. `http://www.math.uwo.ca`, (препринт), 1983.

[43] Joyal A. Письмо к А.Гротендику (A. Grothendieck), 1984.

[44] Karoubi M. Relations between algebraic K-theory and Hermitian K-theory. In *Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983)*, volume 34, pages 259–263, 1984.

[45] Karpenko N.; Merkurjev A. Rost projectors and Steenrod operations. *Doc. Math.*, 7:481–493 (electronic), 2002.

[46] Knebusch M. Isometrien über semilokalen Ringen. *Math. Z.*, 108:255–268, 1969.

[47] Lima E.L. Stable Postnikov invariants and their duals. *Summa Brasil. Math.*, 4:193–251, 1960.

[48] Liu Q. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002.

[49] May J.P. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 11. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[50] Mazza C.; Voevodsky V.; Weibel C. *Lecture notes on motivic cohomology*, volume 2 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[51] Merkurjev A. Algebraic oriented cohomology theories. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 171–193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[52] Milne J. *Étale cohomology*, volume 33 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[53] Mirzaii B. Third homology of general linear groups. *J. Algebra*, 320(5):1851–1877, 2008.

[54] Morel F. Voevodsky's proof of Milnor's conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 35(2):123–143, 1998.

[55] Morel F. Some basic properties of the stable homotopy category of schemes. (препринт).

[56] Morel F.; Voevodsky V. $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90):45–143 (2001), 1999.

[57] Mumford D. *Abelian varieties*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5., Bombay, 1970.

[58] Murre J.P. Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold. *Compositio Math.*, 25:161–206, 1972.

[59] Nisnevich Ye.A. The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory. In *Algebraic K-theory: connections with geometry*

and topology (Lake Louise, AB, 1987), volume 279 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 241–342. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[60] Panin I. Oriented cohomology theories of algebraic varieties. *K-Theory*, 30(3):265–314, 2003. Special issue in honor of Hyman Bass on his seventieth birthday. Part III.

[61] Panin I. Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0619/` (препринт) 2003.

[62] Panin I. Riemann-Roch theorems for oriented cohomology. в *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, volume 131 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 261–333. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[63] Panin I.; Pimenov K.I.; Röndings O. On the relation of Voevodsky's algebraic cobordism to Quillen's K-theory. *Inventiones Mathematicae, vol.175, 2, 435–451 (2009)*,

[64] Panin I.; Yagunov S. Rigidity for orientable functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 172(1):49–77, 2002.

[65] Pimenov K.I. Traces in oriented homology theories II. `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0724/` (препринт) 2005.

[66] Poincaré H. *Œuvres. Tome VI.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1996. Géométrie. Analysis situs (topologie). [Geometry. Analysis situs (topology)], Reprint of the 1953 edition.

[67] Quillen D. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory Bull. Amer. Math. Soc. 75:1293–1298, 1969.

[68] Quillen D. Higher algebraic K-theory. I. B *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. LNM Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[69] Quillen D. *Homotopical algebra.* LNM Vol. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[70] Röndigs O.; Østvær P.A. Rigidity in motivic homotopy theory. *Math. Ann.*, 341(3):651–675, 2008.

[71] Rudyak Yu.B. *On Thom spectra, orientability, and cobordism.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[72] Scharlau W. *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[73] Suslin A. On the K-theory of algebraically closed fields. *Invent. Math.*, 73(2):241–245, 1983.

[74] Suslin A. Algebraic K-theory of fields. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 222–244, Providence, RI, 1987. Amer. Math. Soc.

[75] Suslin A.; Voevodsky V. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Invent. Math.*, 123(1):61–94, 1996.

[76] Suslin A.; Voevodsky V. Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, volume 548 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 117–189. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[77] Suslin A. On the K-theory of local fields. In *Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983)*, volume 34, pages 301–318, 1984.

[78] Switzer R.M. *Algebraic topology—homotopy and homology.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[79] Thomason R.W.; Trobaugh T. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, volume 88 of *Progr. Math.*, pages 247–435. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[80] Vishik A. Generic points of quadrics and Chow groups. *Manuscripta Math.*, 122(3):365–374, 2007.

[81] Voevodsky V. Homology of schemes. *Selecta Math. (N.S.)*, 2(1):111–153, 1996.

[82] Voevodsky V. Voevodsky's Seattle lectures: K-theory and motivic cohomology. In *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, volume 67 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 283–303. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. Записано C. Weibel.

[83] Voevodsky V. Cohomological operations in motivic cohomology. (препринт).

[84] Voevodsky V. Homology of schemes and covariant motives. Диссертация Ph.D., Harvard, 1992.

[85] Voevodsky V. The milnor conjecture. (препринт) MPIM, Bonn, 1997–8.

[86] Voevodsky V. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. I, pages 579–604 (electronic), 1998.

[87] Voevodsky V. Лекция, прочитанная в MSRI 13 мая 1998г. `http://msri.org/publications/ln/msri/1998/homotopy/voevodsky/3`

[88] Voevodsky V. Cohomological theory of presheaves with transfers. В книге [**91**] стр. 87–137.

[89] Voevodsky V. Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic. *Int. Math. Res. Not.*, (7):351–355, 2002.

[90] Voevodsky V. Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98):59–104, 2003.

[91] Voevodsky V.; Suslin A.; Friedlander E. *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.

[92] Weil A. Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:497–508, 1949.

[93] Yagunov S. Homology of bi-Grassmannian complexes. *K-Theory*, 12(3):277–292, 1997.

[94] Yagunov S. On the homology of GL_n and higher pre-Bloch groups. *Canad. J. Math.*, 52(6):1310–1338, 2000.

[95] Yagunov S. Rigidity. II. Non-orientable case. *Doc. Math.*, 9:29–40 (electronic), 2004.