Алгебра и анализ
Том 21 (2009), №2

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ МОТИВОВ

© И. А. ПАНИН, С. А. ЯГУНОВ

Введение

В последнее время в связи с активным изучением когомологических инвариантов в алгебраической геометрии важное значение приобретает перенесение классических топологических конструкций на „алгебро-геометрическую почву“. Особенно интересным в данном направлении представляется изучение топологических свойств категории мотивов.

Понятие мотива было введено А. Гротендиком в 1964 г. для формализации универсальной (ко-)гомологической теории (см. изложение идей Гротендика в работе [5]). Для нас главным примером подобной конструкции является категория мотивов $\mathbf{DM}^-$, построенная для алгебраических многообразий В. Воеводским в [12].

Двойственность Пуанкаре относится к числу классических результатов и впервые появляется (при доказательстве утверждения о симметричности чисел Бетти) в первом топологическом мемуаре А. Пуанкаре „Analysis Situs“ [9]. Доказательство общей теоремы двойственности для экстраординарных теорий когомологий принадлежит, по-видимому, Ф. Адамсу [1].

Целью настоящей работы является доказательство общей теоремы двойственности для мотивов. По сути мы расширяем основное утверждение работы [8] на категорию мотивов. Многие известные теоремы двойственности легко могут быть интерпретированы в рассматриваемых терминах. В частности, из полученного результата следует теорема двойственности Воеводского–Фридландера [4] для случая произвольной характеристики основного поля. Доказательство этого факта, использующее основной результат работы [8], было сообщено авторам А. А. Суслиным в частной беседе.

Вдохновлённые его результатом и категорным подходом к феномену двойственности в топологии, предложенным А. Дольдом и Д. Пуппе [2],

Авторы глубоко благодарны SFB-701 за финансовую поддержку, оказанную во время работы.

мы решили написать короткое, простое и независимое от [8] доказательство аналогичного утверждения для категории мотивов.

Наш результат может быть рассмотрен как чисто категорное утверждение и при желании переписан (в духе „abstract nonsense") как абстрактная теорема о категории со специальным классом морфизмов. По сути нам требуются лишь существование конечных расслоенных произведений и конечного объекта для категории многообразий, незначительная часть структуры тензорной триангулированной категории для категории мотивов и, наконец, существование трансферов для класса, порождённого графиками морфизмов и проекциями для объектов выделенного типа (проективных многообразий). Однако мы предпочли сформулировать все утверждения для случая алгебраических многообразий, дабы яснее продемонстрировать геометрические приложения результата. Следствием этого подхода явилось, в частности, появление второго индекса в (ко-)гомологиях, отвечающего скручиванию с объектом Тэйта $\mathbb{Z}(1)$ у Воеводского [12]. Единственным исключением является классический пример 2.

Аксиомы и примеры

Пусть нам дан ковариантный функтор $\mathbf{M}\colon \mathbf{Sm}/\mathbf{k} \to \mathfrak{M}$ из категории гладких алгебраических многообразий над полем $\mathbf{k}$ в тензорную триангулированную категорию[1] $\mathfrak{M}$, переводящий произведение многообразий в тензорное произведение.

Для универсального конечного объекта $\mathrm{pt} = \operatorname{Spec}\mathbf{k}$ категории $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ обозначим через $\mathbb{Z}$ объект $M(\mathrm{pt}) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{M}$. В дальнейшем мы часто опускаем упоминание канонических изоморфизмов

$$\mathbb{Z} \otimes M(X) \simeq M(X) \simeq M(X) \otimes \mathbb{Z},$$

заданных отождествлениями $\mathrm{pt} \times X = X = X \times \mathrm{pt}$ в категории $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$. Мы также предполагаем, что в категории $\mathfrak{M}$ зафиксирован обратимый объект $\mathbb{Z}(1)$, называемый объектом Тэйта. Будем обозначать произведения n сомножителей $\mathbb{Z}(1)\otimes\cdots\otimes\mathbb{Z}(1)$ через $\mathbb{Z}(n)$, а произведения вида $M\otimes\mathbb{Z}(n)$ — через $M(n)$.

Для многообразия X мы будем называть объект $M(X)$ категории $\mathfrak{M}$ (*ориентируемым*) *мотивом* X, а сам функтор $\mathbf{M}$ — (*ориентируемой*) *теорией мотивов на категории* $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$, если выполнены нижеследующие аксиомы.

[1]В частности, мы предполагаем, что тензорная структура совместима с функтором сдвига, т.е. $A[q] \otimes B = A \otimes B[q]$. Полный список аксиом тензорной триангулированной категории может быть найден в [6, 7].

- **Аксиома сокращения.** Для всякого целого числа q и произвольных многообразий X и Y из $\mathbf{Sm/k}$ существует канонический изоморфизм
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X), M(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X)(q), M(Y)(q)).$$
- **Аксиома трансфера.** Для всякого проективного равноразмерностного морфизма $f\colon X \to Y$ коразмерности $d = \dim Y - \dim X$ задан морфизм мотивов
$$f^!\colon M(Y) \to M(X)(d)[2d]$$
функториальный относительно указанного класса морфизмов, т.е. $f^!(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ и $(fg)^! = g^! f^!$.
- **Аксиома замены базы.** Для всякого трансверсального декартова квадрата (см., например, [8, определение A.1])
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$
с проективными равноразмерностными морфизмами f и $\tilde{f}$ выполнено соотношение:[2] $\tilde{g}_* \tilde{f}^! = f^! g_*$ в категории $\mathfrak{M}$.
- **Аксиома согласованности.** Пусть $F\colon X \times Z \to Y \times Z$ обозначает морфизм $f \times \mathrm{id} \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{M}$ для некоторого морфизма многообразий $f\colon X \to Y$, для которого определён трансфер, и произвольного многообразия Z. Тогда для всяких таких морфизмов f, F в категории $\mathfrak{M}$ выполнено соотношение $F^! = f^! \otimes 1$.

Для заданной теории мотивов $\mathbf{M}$ определим группы гомологий и когомологий следующим образом. Положим
$$\mathrm{HM}^{nm}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(M(X), \mathbb{Z}(m)[n])$$
и
$$\mathrm{HM}_{nm}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{Z}(m)[n], M(X)).$$

Наиболее важным для нас примером вышеприведённой конструкции являются мотивы Воеводского.

[2]Здесь и далее через g_* *et cetera* обозначается морфизм, полученный из индуцированного морфизма $M(g)$ в категории $\mathfrak{M}$ после применения необходимых операций сдвига и скручивания с объектом Тэйта.

Пример 1. Положим $\mathfrak{M} = \mathbf{DM}^{-}(\mathbf{k})$ и функтор $\mathbf{M}$ совпадает с соответствующим функтором мотивов из [10, 12]. Тогда $\mathbf{M}$ оказывается функтором с трансферами для проективных морфизмов, и выполнены соответствующие аксиомы. Проверка аксиомы сокращения в этом случае проделана в работе [11]. Конструкция трансфера и остальные аксиомы принадлежат к числу базисных свойств мотивов Воеводского (см., например, [10, раздел 4]).

Пример 2. Заменяя в наших определениях категорию $\mathbf{Sm}/\mathbf{k}$ категорией гладких топологических многообразий и беря в качестве $\mathfrak{M}$ производную категорию категории $\mathbb{Z}_2$-модулей, мы получим, как можно показать, обычные группы сингулярных (ко-)гомологий с $\mathbb{Z}_2$-коэффициентами. Для согласования индексов нам достаточно положить $M(i)[j] := M[j-i]$, где справа подразумевается обычный сдвиг в триангулированной категории, или просто переписать все наши выкладки с одним индексом. Класс проективных морфизмов в этом случае следует заменить собственными дифференцируемыми отображениями. Конструкция трансфера может быть найдена в любом учебнике по алгебраической топологии (см., например, [3]). Прямая проверка показывает, что все вышеприведённые аксиомы выполняются и в рассматриваемом случае. В результате мы получаем доказательство классической теоремы двойственности Пуанкаре в духе работы Дольда–Пуппе [2].

Утверждения и доказательства

Целью настоящей статьи является доказательство теоремы двойственности для ориентируемых мотивов. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Для всякой ориентируемой теории мотивов* $\mathbf{M}$ *и многообразий* $X, Y \in \mathbf{Sm}/\mathbf{k}$, *где* X *— проективное равноразмерностное, существует канонический изоморфизм абелевых групп*

$$\mathrm{Hom}(M(Y)(i)[j], M(X)) \simeq \mathrm{Hom}(M(Y) \otimes M(X), \mathbb{Z}(d-i)[2d-j]),$$

контравариантный по Y. *Здесь* d *— размерность* X.

Как простое следствие нашей теоремы мы получим следующий классический вариант двойственности Пуанкаре.

Следствие 4. *Для произвольного гладкого проективного равноразмерностного многообразия* X *размерности* d *существует канонический изоморфизм*

$$\mathbb{HM}_{*,*}(X) \simeq \mathbb{HM}^{2d-*,d-*}(X).$$

Доказательство. Положим в утверждении теоремы $Y = \mathrm{pt}$. □

В следующем абзаце мы предполагаем, что рассматриваемая категория $\mathfrak{M}$ допускает внутренние $\underline{Hom}$-объекты, точнее, что для всякого многообразия $X \in \mathbf{Sm/k}$ функтор тензорного произведения $M(X) \otimes -\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ имеет правый сопряжённый.

Для многообразия X, удовлетворяющего условиям следствия 4, рассмотрим каноническое отображение — *мотивный кофундаментальный класс* (см. подробности ниже):

$$M(X) \otimes M(X) = M(X \times X) \xrightarrow{\Delta^!} M(X)(d)[2d] \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}(d)[2d].$$

Это отображение задаёт канонический морфизм двойственности:

$$M(X) \to \underline{Hom}(M(X), \mathbb{Z}(d)[2d]).$$

Выполнено следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— теория мотивов, рассмотренная в примере* 1. *Тогда для всякого гладкого проективного равноразмерностного многообразия* X *построенный морфизм двойственности*

$$\psi\colon M(X) \to \underline{Hom}(M(X), \mathbb{Z}(d)[2d])$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Дополним морфизм ψ до выделенного треугольника в категории $\mathfrak{M}$ и обозначим третью вершину треугольника через $\mathrm{Cone}(\psi)$. Как следует из теоремы 3, для всякого мотива гладкого неприводимого многообразия Y и произвольных целых чисел p, q выполнено равенство $\mathrm{Hom}(M(Y)(p)[q], \mathrm{Cone}(\psi)) = 0$. Поскольку такие мотивы являются множеством образующих категории $\mathfrak{M}$, мы видим, что объект $\mathrm{Cone}(\psi)$ изоморфен нулевому объекту. Из аксиом триангулированной категории легко следует, что морфизм с нулевым конусом есть изоморфизмом. □

Доказательство теоремы 3. Чтобы построить упомянутые в теореме изоморфизмы, нам понадобятся следующие ингредиенты. Прежде всего, обозначим через $1 \in \mathrm{HM}^{0,0}(\mathrm{pt}) = \mathrm{HM}_{0,0}(\mathrm{pt})$ элемент группы (ко-)гомологий точки, соответствующий тождественному отображению $\mathrm{id}\colon \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$. Заметим, что для морфизма многообразий $f\colon X \to Y$ морфизм $M(f)$ индуцирует естественные отображения $f_*\colon \mathrm{HM}_{*,*}(X) \to \mathrm{HM}_{*,*}(Y)$ на мотивных гомологиях и $f^*\colon \mathrm{HM}^{*,*}(Y) \to \mathrm{HM}^{*,*}(X)$ — на когомологиях соответственно. В том случае, когда f проективен коразмерности d, отображение трансфера $f^!$ на мотивах индуцирует соответствующие трансферы

$$f_!\colon \mathrm{HM}^{*,*}(X) \to \mathrm{HM}^{*+2d,*+d}(Y) \ \text{ и } \ f^!\colon \mathrm{HM}_{*,*}(Y) \to \mathrm{HM}_{*-2d,*-d}(X)$$

на (ко-)гомологиях. Для многообразия X размерности d рассмотрим морфизмы диагонали и проекции

$$X \times X \xleftarrow{\Delta} X \xrightarrow{p} \mathrm{pt}$$

и назовём элементы

$$[X]_* = \Delta_* p^!(1) \in \mathrm{HM}_{2d,d}(X \times X)$$

и

$$[X]^* = \Delta_! p^*(1) \in \mathrm{HM}^{2d,d}(X \times X)$$

соответственно *мотивными фундаментальным и кофундаментальным классами многообразия* X. Определим также косые произведения

$$/\colon \mathrm{HM}^{i,j}(X \times Y) \otimes \mathrm{HM}_{m,n}(Y) \to \mathrm{HM}^{i-m,j-n}(X)$$

и

$$\backslash\colon \mathrm{HM}_{m,n}(X \times Y) \otimes \mathrm{HM}^{i,j}(Y) \to \mathrm{HM}_{m-i,n-j}(X)$$

следующим образом. Для элементов $\alpha \in \mathrm{HM}^{i,j}(X \times Y)$ и $a \in \mathrm{HM}_{m,n}(Y)$ положим

$$\alpha/a : M(X)(m) = M(X) \otimes \mathbb{Z}(m) \xrightarrow{1\otimes a} M(X) \otimes M(Y)[-n] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}(i)[j-n]$$

для первого произведения и симметрично

$$\beta\backslash b : \mathbb{Z}(m)[n-j] \xrightarrow{b} M(X) \otimes M(Y)[-j] \xrightarrow{1\otimes\beta} M(X) \otimes \mathbb{Z}(i) = M(X)(i)$$

— для второго, полагая $b \in \mathrm{HM}_{m,n}(X \times Y)$ и $\beta \in \mathrm{HM}^{i,j}(Y)$. (Здесь и далее мы неявно используем аксиому сокращения.) Зададим теперь гомоморфизмы двойственности Пуанкаре для случая следствия 4, полагая

$$\mathcal{D}_\bullet(-) = [X]^*/-\colon \mathrm{HM}_{*,*}(X) \to \mathrm{HM}^{2d-*,d-*}(X)$$

и

$$\mathcal{D}^\bullet(-) = -\backslash[X]_*\colon \mathrm{HM}^{*,*}(X) \to \mathrm{HM}_{2d-*,d-*}(X),$$

в точности следуя формулировкам работы [8].

Естественное обобщение этих гомоморфизмов на общий случай, возникающий в условиях теоремы, следующее. Обозначим для краткости мотив $M(Y)(i)[j]$ через $\mathcal{Y}$, а сдвиг на $(d)[2d]$ — через $\{d\}$. Построим отображение

$$\mathcal{D}_\bullet\colon \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}, -) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{Y} \otimes -, \mathbb{Z}\{d\}),$$

полагая, что для заданного морфизма $a \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}, M(X))$ морфизм $D_\bullet(a)$ определяется формулой

$$\mathcal{Y} \otimes M(X) \xrightarrow{a\otimes 1} M(X) \otimes M(X) \xrightarrow{\Delta^!} M(X)\{d\} \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z}\{d\}.$$

Обратное отображение

$$\mathcal{D}^\bullet\colon \operatorname{Hom}(\mathcal{Y} \otimes -, \mathbb{Z}\{d\}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}, -)$$

задаётся для морфизма $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathcal{Y} \otimes M(X), \mathbb{Z}\{d\})$ отображением

$$\mathcal{Y} \overset{1\otimes p^!}{\to} \mathcal{Y} \otimes M(X)\{-d\} \overset{1\otimes \Delta_*}{\to} \mathcal{Y} \otimes M(X) \otimes M(X)\{-d\} \overset{\alpha\otimes 1}{\to} \mathbb{Z} \otimes M(X).$$

Контравариантная функториальность построенных отображений по переменной $\mathcal{Y}$ очевидна из конструкции. Теорема 3 следует теперь из аксиомы сокращения и коммутативности следующих диаграмм:[3]

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}\otimes\mathbb{Z}\otimes M(X) \arrow[d, "1\otimes p^!\otimes 1"'] \arrow[dr, equal, "1"] & & \\
\mathcal{Y}\otimes M(X)^{\otimes 2}\{-d\} \arrow[r, "1\otimes\Delta^!"] \arrow[d, "\Delta^3_*"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & \mathcal{Y}\otimes M(X) \arrow[d, "\Delta_*"'] \arrow[dr, equal, "1"] & \\
\mathcal{Y}\otimes M(X)^{\otimes 3}\{-d\} \arrow[r, "1\otimes 1\otimes\Delta^!"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1\otimes 1"'] & \mathcal{Y}\otimes M(X)^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes 1\otimes p_*"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1"'] & \mathcal{Y}\otimes M(X)\otimes\mathbb{Z} \arrow[d, "\alpha"'] \\
\mathbb{Z}\otimes M(X)^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes\Delta^!"] & \mathbb{Z}\otimes M(X)\{d\} \arrow[r, "1\otimes p_*"] & \mathbb{Z}\{d\}
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p^!"'] & M(X)\otimes\mathbb{Z} \arrow[d, "1\otimes p^!"'] \arrow[dr, equal, "1"] & & \\
\mathcal{Y}\otimes M(X)\{-d\} \arrow[r, "a\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\Delta_*"'] & M(X)^{\otimes 2}\{-d\} \arrow[r, "\Delta^!"] \arrow[d, "\Delta^2_*"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & M(X) \arrow[d, "\Delta_*"'] \arrow[dr, equal, "1"] & \\
\mathcal{Y}\otimes M(X)^{\otimes 2}\{-d\} \arrow[r, "a\otimes 1\otimes 1"] & M(X)^{\otimes 3}\{-d\} \arrow[r, "\Delta^!\otimes 1"] & M(X)^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes p_*"] & \mathbb{Z}\otimes M(X).
\end{tikzcd}$$

Поскольку квадраты, помеченные в обеих диаграммах знаками $\blacksquare$, отвечают трансверсальному декартову квадрату многообразий

$$\begin{tikzcd}
X\times X \arrow[d, "\mathrm{id}\times\Delta^2"'] & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, "\Delta"] \\
X\times X\times X & X\times X, \arrow[l, "\Delta^1\times\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

они коммутативны по аксиомам замены базы и согласованности. $\square$

[3]В последующих диаграммах $M(X)^{\otimes n}$ обозначает n-кратное тензорное произведение, а Δ^i — морфизм диагонали, применённый к i-му сомножителю.

В заключение отметим, что отображение трансфера на (ко-)гомологиях однозначно восстанавливается по зафиксированным отображениям двойственности Пуанкаре, как происходит и в классическом топологическом случае. Именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 6. *Для проективных равноразмерностных многообразий* $X, Y \in \mathbf{Sm/k}$ *и морфизма* $f\colon X \to Y$ *выполнены равенства*

$$f_! = \mathcal{D}^Y_\bullet f_* \mathcal{D}^\bullet_X \quad и \quad f^! = \mathcal{D}^\bullet_X f^* \mathcal{D}^Y_\bullet .$$

Здесь $\mathcal{D}^X_\bullet$ *и* $\mathcal{D}^Y_\bullet$ *обозначают отображения двойственности Пуанкаре из следствия* 4, *построенные для многообразий* X *и* Y *соответственно.*

Доказательство. Первое равенство легко следует из соотношения $f_*(\alpha \backslash [X]_*) = f_!(\alpha) \backslash [Y]_*$, которое в свою очередь вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & M(X)\otimes M(X) \arrow[r, "\alpha\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes f_*"] & \mathbb{Z}\otimes M(X) \arrow[d, "1\otimes f_*"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "p^!_X"] \arrow[dr, "p^!_Y"'] & M(X) \arrow[r, "\Gamma^f_*"'] \arrow[ur, "\Delta^X_*"] & M(X)\otimes M(Y) \arrow[r, "\alpha\otimes 1"] & \mathbb{Z}\otimes M(Y) \\
 & M(Y) \arrow[u, "f^!"] \arrow[r, "\Delta^Y_*"'] \arrow[ur, phantom, "\blacksquare"] & M(Y)\otimes M(Y) \arrow[u, "f^!\otimes 1"'] &
\end{tikzcd}$$

(обозначения сдвигов здесь для простоты опущены). Отмеченный знаком $\blacksquare$ квадрат соответствует трансверсальной диаграмме графика морфизма f:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Gamma^f"] \arrow[d, "f"'] & X\times Y \arrow[d, "f\times \mathrm{id}"] \\
Y \arrow[r, "\Delta^Y"'] & Y\times Y,
\end{tikzcd}$$

коммутативность остальной части диаграммы проверяется тривиально. Второе равенство может быть получено аналогично. □

Список литературы

[1] Adams J. F., *Stable homotopy and generalized homology*, Univ. of Chicago Press, Chicago–London, 1974.

[2] Дольд А., Пуппе Д., *Двойственность, след и трансфер*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **154** (1983), 81–97.

[3] Фоменко А., Фукс Д., *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.

[4] Friedlander E., Voevodsky V., *Bivariant cycle cohomology*, Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 138–187.

[5] Манин Ю. И., *Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования*, Мат. сб. **77 (119)** (1968), №4, 475–507.

[6] May J. P., *The additivity of traces in triangulated categories*, Adv. Math. **163** (2001), no. 1, 34–73.

[7] Mazza C., Voevodsky V., Weibel C., *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Math. Monogr., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.

[8] Panin I., Yagunov S., *T-spectra and Poincaré duality*, J. Reine Angew. Math. **617** (2008), 193–213.

[9] Poincaré H., *Analysis situs*, J. École Polytech. **1** (1895), 1–121.

[10] Suslin A., Voevodsky V., *Bloch–Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 117–189.

[11] Voevodsky V., *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*, Int. Math. Res. Not. **2002**, no. 7, 351–355.

[12] Voevodsky V., *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 188–238.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
33615, Bielefeld
Universitätstr., 25
Germany
E-mail: panin@pdmi.ras.ru
E-mail: yagunov@gmail.com

Поступило 25 сентября 2008 г.